Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 31 januari 2025

Uitwerking uitsmijter

Opgave

Vind alle (niet noodzakelijkerwijs positieve) gehele getallen n waarvoor geldt dat $14n^2+37n+46$ deelbaar is door $5n+12$.

Antwoord

$n = 2$, $n = -2$, $n = -11$ en $n = -97$.

Uitwerking

Stel dat $14n^2+37n+46$ deelbaar is door $5n+12$, oftewel dat $5n+12$ een deler is van $14n^2+37n+46$. Dan is $5n + 12$ ook een deler van

$$5 \cdot (14n^2 + 37n + 46) = 70n^2 + 185n + 230.$$

We trekken hier nu een geschikt veelvoud van $5n + 12$ vanaf zodat de term $70n^2$ wegvalt. Dit heeft geen invloed op de deelbaarheid door $5n + 12$. Daarom is $5n + 12$ ook een deler van

$$(70n^2 + 185n + 230) - 14n \cdot (5n + 12) = (70n^2 + 185n + 230) - (70n^2 + 168n) = 17n + 230.$$

Vermenigvuldigen met 5 geeft dat $5n + 12$ ook een deler is van $5 \cdot (17n + 230) = 85n + 1150$. Daaruit volgt dat $5n + 12$ een deler is van

$$(85n + 1150) - 17 \cdot (5n + 12) = (85n + 1150) - (85n + 204) = 946.$$

De delers van $946 = 2 \cdot 11 \cdot 43$ zijn -946, -473, -86, -43, -22, -11, -2, -1, 1, 2, 11, 22, 43, 86, 473 en 946. Dus $5n + 12$ is gelijk aan een van deze delers. Dat kan alleen als die deler rest 2 heeft bij deling door 5, oftewel als de deler gelijk is aan -473, -43, 2 of 22. Dit geeft als mogelijke oplossingen respectievelijk $n = -97$, $n = -11$, $n = -2$ en $n = 2$.

Nu moeten we nog aantonen dat deze n inderdaad voldoen aan de voorwaarde. Dit kan op twee manieren. Een mogelijkheid is het invullen van de gevonden waarden en het controleren van de deelbaarheidsrelatie. We vinden dan:

n	$5n + 12$	$14n^2 + 37n + 46$	deelbaar?
2	22	176	ja
-2	2	28	ja
-11	-43	1333	ja
-97	-473	128.183	ja

Alle gevonden n zijn dus inderdaad oplossingen.
Opmerking: het rekenwerk kan eventueel vereenvoudigd worden door te gebruiken dat $14n^2 + 37n + 46$ deelbaar is door $5n + 12$ dan en slechts dan als

$$(14n^2 + 37n + 46) - 3n \cdot (5n + 12) = (14n^2 + 37n + 46) - (15n^2 + 36n) = -n^2 + n + 46$$

deelbaar is door $5n + 12$.

Het is ook mogelijk om in te zien dat alle gevonden n aan de voorwaarde voldoen zonder $14n^2+37n+46$ uit te rekenen. Het eerste deel van de uitwerking bestaat uit vier stappen: twee stappen waarin we respectievelijk $14n^2+37n+46$ en $17n+230$ met 5 vermenigvuldigen, en twee stappen waarin we een veelvoud van $5n+12$ ervan aftrekken. Het is duidelijk dat het aftrekken van een veelvoud van $5n+12$ geen invloed heeft op de deelbaarheid door $5n+12$. In deze twee stappen worden dus geen 'extra' mogelijkheden voor n geïntroduceerd. Hetzelfde geldt voor de andere twee stappen: omdat $5n+12$ en 5 geen gemeenschappelijke niet-triviale delers hebben, kan $5n+12$ alleen een deler zijn van $5 \cdot (14n^2+37n+46)$ of $5 \cdot (17n+230)$ als het een deler is van respectievelijk $14n^2+37n+46$ of $17n+230$. Alle gevonden n zijn dus inderdaad oplossingen.

Er zijn dus vier oplossingen: $n=-97$, $n=-11$, $n=-2$ en $n=2$.

Word nu Vriend van de Nederlandse Wiskunde Olympiade!
`http://www.wiskundeolympiade.nl/vrienden`