Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 2 februari 2024

Uitwerking uitsmijter

Opgave

Een bedrijf organiseert drie oefensessies voor de Wiskunde Olympiade voor Bedrijven.

(a) De eerste oefensessie wordt gehouden in een zaal waar een lange tafel met acht stoelen staat. Alle stoelen staan naast elkaar aan één kant van de tafel.
Aan deze sessie doet één team van drie deelnemers mee. Om te voorkomen dat ze elkaars antwoorden kunnen zien, houden ze tussen ieder tweetal deelnemers steeds een of meer stoelen vrij.
Op hoeveel manieren kunnen ze de stoelen kiezen? Het gaat in deze opgave enkel om de keuze van de stoelen, niet om de verdeling van de personen over de stoelen.

(b) Bij de tweede sessie is ook een tweede team aanwezig. In totaal zijn ze dus met zes personen. Ditmaal gebruiken ze een lange tafel met zestien stoelen naast elkaar.
Op hoeveel manieren kunnen ze zes stoelen kiezen? Zowel tussen deelnemers van hetzelfde team, als tussen deelnemers van verschillende teams, moeten een of meerdere stoelen vrijgehouden worden.

(c) Ook bij de derde sessie zijn beide teams aanwezig. Nu gebruiken ze een brede tafel met aan beide kanten acht stoelen. Team A gaat aan de linkerkant van de tafel zitten; team B aan de rechterkant.
De deelnemers mogen nu niet naast elkaar of recht tegenover elkaar zitten.
Op hoeveel manieren kunnen ze zes stoelen kiezen, zodat team A aan de linkerkant zit, team B aan de rechterkant en geen tweetal deelnemers naast elkaar of recht tegenover elkaar?

Antwoorden

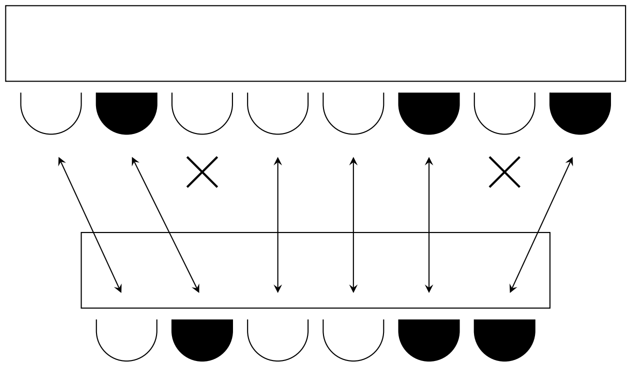
(a) 20

(b) 462

(c) 92

Uitwerking

(a) Als we drie stoelen kiezen waarvan geen tweetal naast elkaar staat, dan zit er tussen de eerste en tweede gekozen stoel minimaal één lege stoel. Hetzelfde geldt voor de tweede en derde gekozen stoel. De stoelen direct rechts van de eerste en de tweede (van links naar rechts) gekozen stoel zijn dus leeg. Halen we deze twee stoelen weg, dan zijn er nog zes stoelen over waarvan we er drie uitgekozen hebben.
Omgekeerd geeft iedere keuze van drie stoelen uit een rij van zes (zonder verdere voorwaarden) een keuze van drie stoelen uit acht die voldoet aan de oorspronkelijke voorwaarde van minstens een vrije stoel tussen elk tweetal gekozen stoelen, door direct rechts van de eerste en tweede gekozen stoel een lege stoel toe te voegen.



Het gevraagde aantal is daarom gelijk aan het aantal mogelijkheden om drie stoelen te kiezen uit zes. Dit is gelijk aan

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Alternatieve oplossing. We maken een gevalsonderscheid naar de plaats van de eerste gekozen stoel. Als we de meest linker stoel kiezen, dan kan de tweede gekozen stoel op positie 3 of verder staan. Als deze op positie 3 staat, dan kan de derde gekozen stoel op positie 5, 6, 7 of 8. Dit geeft 4 mogelijkheden. Op dezelfde manier vinden we 3+2+1 mogelijkheden waarbij de tweede gekozen stoel respectievelijk op positie 4, 5 of 6 staat (posities 7 en 8 zijn niet mogelijk, omdat er dan geen ruimte meer is voor de derde gekozen stoel). In totaal geeft dit dus 4+3+2+1 mogelijkheden.
Analoog zijn er 3+2+1 mogelijkheden als de meest linker gekozen stoel op positie 2 staat, 2+1 mogelijkheden met positie 3 en 1 mogelijkheid met positie 4. De drie stoelen kunnen dus op (4+3+2+1) + (3+2+1) + (2+1) + 1 = 10+6+3+1 = 20 manieren gekozen worden.

(b) Op dezelfde manier als in het vorige onderdeel, correspondeert een keuze uit zestien stoelen van zes stoelen die niet naast elkaar mogen staan met een keuze van zes stoelen uit elf zonder verdere voorwaarden. Het aantal manieren om zes stoelen te kiezen uit elf is

$$\binom{11}{6} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 33 \cdot 14 = 462.$$

(c) Zoals we in het eerste onderdeel zagen, kan team A op twintig manieren aan een kant van de tafel plaatsnemen. We bepalen voor elke optie voor team A op hoeveel manieren team B aan de overkant van de tafel kan gaan zitten.
Stel dat team A de stoelen op positie 1, 3 en 5 gebruikt. Team B mag dan nog de stoelen op posities 2, 4, 6, 7 en 8 gebruiken. Dit kan op vijf manieren (namelijk 2, 4 en één van 6, 7, 8; of 6, 8 en één van 2, 4).
In deze berekening is de exacte positie van de stoelen van team A niet van belang; we gebruiken alleen dat de overgebleven stoelen voor team B in groepjes van 1, 1 en 3 stoelen

staan. In alle andere gevallen waarbij de beschikbare stoelen voor team B in groepjes van diezelfde grootte staan, zijn er dus ook vijf mogelijkheden.
Er zijn vijf mogelijkheden voor de groepjes stoelen voor team B. In onderstaande tabel is bij iedere mogelijkheid aangeven op hoeveel manieren de teams de stoelen kunnen kiezen. In de laatste kolom staat het totaal aantal mogelijkheden: het aantal opties voor team A maal het aantal opties voor team B.
Uit deze tabel zien we dat er in totaal 6+4+30+24+28 = 92 mogelijkheden zijn.

Groepjes vrije stoelen voor team B	Aantal mogelijkheden team A	Aantal mogelijkheden team B	Aantal mogelijkheden teams A en B
1 en 4	2	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3 = 6$
2 en 3	2	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2 = 4$
1, 1 en 3	$3 + 3$	$1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (1 \cdot 1)$	$6 \cdot 5 = 30$
1, 2 en 2	$3 + 3$	$1 \cdot 2 \cdot 2$	$6 \cdot 4 = 24$
1, 1, 1 en 2	4	$1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 2)$	$4 \cdot 7 = 28$