

# Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven



vrijdag 27 januari 2023

## Uitwerking uitsmijter

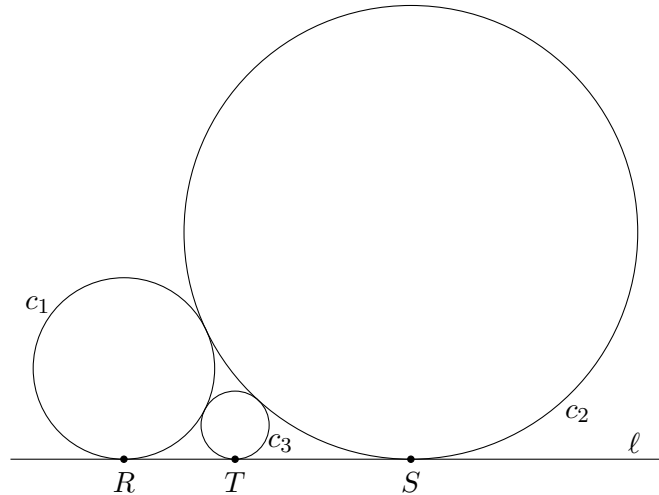
Cirkel  $c_1$  heeft straal 4 en raakt de lijn  $\ell$  in het punt  $R$ .

Cirkel  $c_2$  heeft straal 9, raakt  $c_1$  en raakt  $\ell$  in het punt  $S$ .

Cirkel  $c_3$  raakt cirkels  $c_1$  en  $c_2$  en raakt  $\ell$  in het punt  $T$ , waarbij  $T$  tussen  $R$  en  $S$  ligt.

Zie de figuur hiernaast. (De figuur is niet op schaal getekend.)

Zij  $r$  de straal van cirkel  $c_3$ . In deze opgave gaan we op zoek naar  $r$ .



- Bereken  $|RS|$  (de lengte van  $RS$ ).
- Er is een getal  $c$  zodat  $|RT|^2 = c \cdot r$ . Bereken  $c$ .
- Bereken  $r$ .

### Antwoorden:

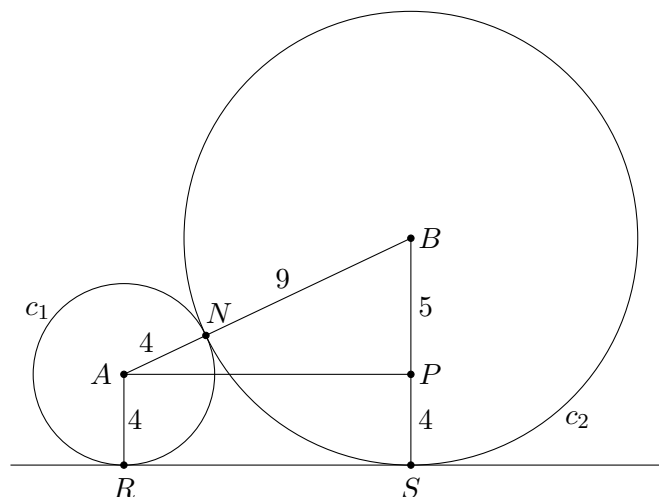
- $|RS| = 12$ .
- $c = 16$ .
- $r = \frac{36}{25}$ .

### Uitwerking:

(a) Zij  $A$  het middelpunt van  $c_1$  en  $B$  het middelpunt van  $c_2$ . Zij  $N$  het raakpunt van  $c_1$  en  $c_2$  en zij  $P$  de horizontale projectie van  $A$  op  $BS$ . Dan vormen  $A$ ,  $B$  en  $P$  een rechthoekige driehoek.

Merk op dat  $AN$  en  $BN$  stralen zijn van respectievelijk  $c_1$  en  $c_2$ . Daarom is  $|AB| = |AN| + |BN| = 4 + 9 = 13$ . Omdat ook  $AR$  en  $BS$  stralen van de cirkels zijn, en  $|PS| = |AR|$ , is  $|BP| = |BS| - |PS| = 9 - 4 = 5$ .

Uit de stelling van Pythagoras volgt nu dat  $|RS| = |AP| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ .



(b) De aanpak is vergelijkbaar met de aanpak van onderdeel (a). Zij  $C$  het middelpunt van cirkel  $c_3$  en zij  $Q$  de horizontale projectie van  $C$  op  $AR$ . Dan vormen  $A$ ,  $C$  en  $Q$  een rechthoekige driehoek met  $|AQ| = 4 - r$  en  $|AC| = 4 + r$ . De stelling van Pythagoras geeft nu dat

$$\begin{aligned} |QC|^2 &= (4 + r)^2 - (4 - r)^2 = \\ (16 + 8r + r^2) - (16 - 8r + r^2) &= 16r. \end{aligned}$$

Omdat  $|RT| = |QC|$  volgt hieruit dat

$$|RT|^2 = |QC|^2 = 16r$$

zodat  $c = 16$ .

(c) Op analoge wijze als in onderdeel (b) vormen  $B$ ,  $C$  en de horizontale projectie van  $C$  op  $BS$  een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde  $9 - r$  en schuine zijde  $9 + r$ . Het kwadraat van de lengte van de tweede rechthoekszijde is

$$(9 + r)^2 - (9 - r)^2 = (81 + 18r + r^2) - (81 - 18r + r^2) = 36r.$$

De lengte van deze zijde is gelijk aan  $|TS|$ , zodat  $|TS| = 6\sqrt{r}$ .

In onderdeel (a) zagen we dat  $|RS| = 12$ , dus  $|RT| + |TS| = 12$ . Uit onderdeel (b) volgt dat  $|RT| = 4\sqrt{r}$ . Er geldt dus dat  $10\sqrt{r} = 4\sqrt{r} + 6\sqrt{r} = |RT| + |TS| = 12$  en dus  $\sqrt{r} = \frac{6}{5}$ . We concluderen dat  $r = \frac{36}{25}$ .

