Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

16–27 januari 2023

Uitwerkingen

A1. B) 4 Geen twee van de vier X-en in de hoeken kunnen met dezelfde mast verbonden worden. Er zijn dus minstens vier masten nodig. Hiernaast zie je een oplossing met vier masten.

X		X		X
	M		M	
X				X
	M		M	
X		C		X

A2. D) 4 Omdat drie van de vier artikelen een prijs in hele euro's hebben, moeten er van de stickervellen ofwel 6 verkocht zijn (voor 1,80 euro) ofwel 16 (voor 4,80 euro). Meer kan niet, omdat er maar 20 op voorraad waren. Voor de andere drie artikelen is er dus 74 of 71 euro over. Neem eerst aan dat er 74 euro over is. Omdat de knuffelberen en waterpistolen een veelvoud van 5 euro kosten, moeten er van de voetballen 3 verkocht zijn (nog 65 euro over) of een veelvoud van 5 extra. Maar 8 voetballen kan niet, want dan moeten er meer dan 8 knuffelberen verkocht zijn en zoveel waren er niet op voorraad. Dus het zijn er 3. Er moeten dan minstens 4 waterpistolen verkocht zijn en minstens 4 knuffelberen, maar dat is samen meer dan 65 euro. Dus dit kan niet.

Neem nu aan dat er 71 euro over is. Dan moeten er volgens dezelfde redenering 2 voetballen verkocht zijn of minstens 7, maar dat laatste kan weer niet. Dus is er nog 65 euro over voor de knuffelberen en waterpistolen. Daarvan moeten er minstens 3 verkocht zijn, voor minstens $3 \cdot 5 + 3 \cdot 15 = 60$ euro. Er moeten dus precies 3 waterpistolen verkocht zijn en om het bedrag compleet te maken, precies 4 knuffelberen.

A3. C) 4 In elk veld van het schaakbord schrijven we op hoeveel zetten een paard nodig heeft om daar te komen. We beginnen met 0 in de hoek, schrijven dan een 1 op in de (lege) vakjes waar je vanaf de 0 in één sprong kan komen, schrijven vervolgens een 2 op in de (lege) vakjes waar je vanaf een 1 in één sprong kan komen, enzovoorts. Uiteindelijk tellen we hoe vaak elk getal voorkomt en zien we dat 4 het meest voorkomende getal is, namelijk 21 keer (3 komt 20 keer voor).

5	4	5	4	5	4	5	6
4	3	4	3	4	5	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4
2	3	2	3	4	3	4	5
3	2	3	2	3	4	3	4
2	1	4	3	2	3	4	5
3	4	1	2	3	4	3	4
0	3	2	3	2	3	4	5

A4. E) 3 Noem de drie gelijke hoeken α. We zien dat $|EB| = |ED| + |DB| = 2 + 4 = 6 = |AB|$, en dus is driehoek $\triangle ABE$ een gelijkbenige driehoek. Hieruit volgt dat $\angle AEB = \angle BAE = 2\alpha$ en vanwege de gestrekte hoek bij E vinden we dat $\angle AEC = 180^\circ - 2\alpha$. Omdat $\angle CAE = \alpha$ en de som van de hoeken in $\triangle ACE$ gelijk is aan 180°, geldt ook dat $\angle ACE = \alpha$. We hebben dus nog een gelijkbenige driehoek gevonden, namelijk $\triangle ACE$, en daaruit volgt dat $|CE| = |AE| = 3$.

A5. C) 220 We kunnen letters A maken op 10 verschillende hoogtes. Voor elke hoogte houden we bij hoeveel er zijn. Voor hoogte 1 zijn er 10 plekken waar we de benen van de A kunnen neerzetten; het horizontale streepje kan dan maar op een plek. Voor hoogte 2 zijn er 9 plekken waar de benen kunnen; het horizontale streepje kan nu op 2 mogelijke plekken komen. Voor hoogte 3 zijn er 8 plekken waar de benen kunnen; het horizontale streepje kan op 3 mogelijke plekken komen. Dit patroon gaat zo door en in totaal vinden we $1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 220$ mogelijke letters A.

A6. B) 506 De eerste persoon kan niet liegen, want dan zou die zelf een schurk zijn en de eerste uitspraak juist waar zijn. Deze persoon is dus een ridder. Vanwege de tweede uitspraak van deze persoon zijn er dus minstens 1012 ridders. Alle 1011 andere mensen die een uitspraak doen over het aantal ridders, spreken dus de waarheid en zijn zelf een ridder.

Alle schurken zitten dus bij de 1012 mensen die een uitspraak over het aantal schurken doen. Stel dat er precies k schurken zijn. Dan spreken van die 1012 mensen precies k de waarheid en de andere $1012 - k$ liegen. Die laatste zijn dus de schurken, dus $1012 - k = k$ en daaruit volgt $k = 506$.

A7. C) 3 Omdat $a < b$, geldt dat $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. In het bijzonder moet $\frac{1}{a}$ dus meer dan de helft van $\frac{4}{15}$ zijn: $\frac{1}{a} > \frac{2}{15}$. Hieruit volgt dat $a < \frac{15}{2} < 8$. Bovendien moet a minstens 4 zijn, anders is $\frac{1}{a}$ groter dan $\frac{4}{15}$. We hebben dus vier mogelijkheden voor a: 4, 5, 6 en 7. Voor $a = 4$ vinden we $\frac{1}{b} = \frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$ en dus $b = 60$. Voor $a = 5$ vinden we $\frac{1}{b} = \frac{4}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ en dus $b = 15$. Voor $a = 6$ vinden we $\frac{1}{b} = \frac{4}{15} - \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$ en dus $b = 10$. Voor $a = 7$ vinden we $\frac{1}{b} = \frac{4}{15} - \frac{1}{7} = \frac{13}{105}$ en in dit geval is de oplossing $b = \frac{105}{13}$ niet geheel. In totaal vinden we dus 3 oplossingen.

A8. B) 540 Kies een vaste volgorde voor de potloden. Dan kunnen we een verdeling van de potloden over de meisjes weergeven door middel van een rijtje van zes keer de letter A, B of C. AABBCA betekent bijvoorbeeld dat Anna het eerste, tweede en zesde potlood krijgt, Bella het derde en vierde potlood, en Celine het vijfde potlood. Er zijn $3^6 = 729$ van deze rijtjes, maar niet al die rijtjes geven een toegestane verdeling, aangezien elk meisje minstens één potlood moet krijgen.

Er zijn drie rijtjes waarbij één meisje alle potloden krijgt: AAAAAA, BBBBBB en CCCCCC. Die tellen dus niet mee. We gaan vervolgens kijken hoeveel rijtjes er zijn waarbij Celine geen enkel potlood krijgt, maar Anna en Bella wel minstens één potlood. Er zijn 2^6 mogelijkheden voor een rijtje met alleen A en B, maar daarvan hebben we AAAAAA en BBBBBB al gezien. Er zijn dus $2^6 - 2 = 62$ rijtjes waarbij Anna en Bella minstens één potlood krijgen, maar Celine geen. Op dezelfde manier vinden we dat er 62 rijtjes zijn waarbij Bella of Anna geen potlood krijgt, maar de andere twee meisjes wel minstens één potlood.

In totaal vinden we dat er $729 - 3 - 3 \cdot 62 = 540$ manieren zijn om de potloden te verdelen.

B1. 1 Merk op dat de mediaan van 2023 getallen altijd het getal is dat op plek 1012 staat als je de getallen op grootte sorteert. Het eerste getal dat Albert toevoegt, en dat dus op plek 2024 komt te staan, is de mediaan van de getallen 1 tot en met 2023. Dat is 1012. We zullen nu laten zien dat alle volgende getallen die Albert toevoegt, ook gelijk zijn aan 1012.

Stel dat Albert zojuist op plek n het getal 1012 heeft geschreven, als mediaan van de getallen op plek $n - 2023$ tot en met $n - 1$. We noemen dit de oude verzameling. Welk getal komt er op plek $n + 1$? Hiervoor bekijkt Albert de verzameling van getallen op plek $n - 2022$ tot en met n, dat noemen we de nieuwe verzameling. De nieuwe verzameling is bijna gelijk aan de oude verzameling: het getal 1012 is erbij gekomen en het getal op plek $n - 2023$ hoort er niet meer bij. Noem dit laatste getal x.

We bekijken nu de drie opties voor x. Als $x = 1012$, dan bestaat de nieuwe verzameling uit precies dezelfde getallen als de oude verzameling, en dus is de mediaan opnieuw 1012. Als x groter is dan 1012, dan zijn de kleinste 1012 getallen uit de oude verzameling hetzelfde gebleven (de mediaan van de oude verzameling is immers 1012) en dan is de mediaan wederom 1012. Als x kleiner is dan 1012, dan zijn de grootste 1012 getallen in de nieuwe verzameling precies de grootste 1012 getallen uit de oude verzameling, en ook dan is de mediaan gelijk aan 1012.

We concluderen dat Albert elke keer weer het getal 1012 opschrijft. Ook het drieduizendste getal is dus gelijk aan 1012. Er is dus maar één mogelijkheid.

B2. 175 We nemen aan dat het driecijferige getal uit de cijfers a, b en c bestaat en dus gelijk is aan $100a + 10b + c$. Het cijferproduct van dit getal is $a \cdot b \cdot c$. Er moet dus gelden dat

$100a + 10b + c = 5 \cdot a \cdot b \cdot c$. Omdat de rechterkant van deze vergelijking een veelvoud is van vijf, moet gelden dat $c = 0$ of $c = 5$. Als $c = 0$ dan is ook $5 \cdot a \cdot b \cdot c = 0$ en dat kan niet, want we begonnen met een getal ongelijk aan nul. Dus $c = 5$. Dat betekent dat $5 \cdot a \cdot b \cdot c$ een veelvoud van 25 is dat eindigt op een 5, dus eindigt het op 25 of 75, dus $b = 2$ of $b = 7$. Bovendien volgt uit het feit dat $100a + 10b + c = 5abc$ eindigt op een 5 dat $5abc$ oneven is, dus a, b en c alle drie oneven, dus $b = 7$. Vullen we de gevonden waardes voor b en c in in de eerste vergelijking, dan vinden we $100a + 75 = 175a$. De enige oplossing van deze vergelijking is $a = 1$. Het enige driecijferige getal dat precies vijfmaal zo groot is als zijn cijferproduct, is dus 175.

B3. $\frac{1}{2}$ Als we het op één na grootste vierkant 45 graden draaien, dan liggen de hoekpunten op de middens van de zijden van het grootste vierkant en zien we dat het grootste vierkant een twee keer zo grote oppervlakte heeft als het op één na grootste vierkant. Deze situatie herhaalt zich: het op één na grootste vierkant heeft op zijn beurt een twee keer zo grote oppervlakte als het op twee na grootste vierkant.

Als de oppervlakte van het derde vierkant A is, dan is de oppervlakte van het tweede vierkant $2A$ en die van het eerste vierkant $4A$. Dus is het buitenste lichtgrijze gebied $2A - A = A$ en het buitenste donkergrijze gebied $4A - 2A = 2A$. Dus het buitenste donkergrijze gebied is twee keer zo groot als het buitenste lichtgrijze gebied. Het volgende donkergrijze gebied is twee keer zo groot als het volgende lichtgrijze gebied, enzovoorts. In totaal heeft het donkergrijze gebied dus een twee keer zo grote oppervlakte als het lichtgrijze gebied. Het lichtgrijze gebied heeft dus oppervlakte $\frac{1}{2}$.

B4. 1113 Omdat zowel a^2 als b^2 maar zeven cijfers hebben, kunnen de cijfers van a en b niet te groot zijn. Immers, $4000^2 = 16.000.000$, dus het eerste cijfer van zowel a als b is 1, 2 of 3. Omdat je b krijgt door a achterstevoren te lezen, is dus ook het laatste cijfer van zowel a als b gelijk aan 1, 2 of 3. Als het eerste en het laatste cijfer van a hetzelfde zijn, dan zijn het eerste en het laatste cijfer van b dat ook, en bovendien gelijk aan het eerste en laatste cijfer van a. Maar dan is het laatste cijfer van a^2 gelijk aan het laatste cijfer van b^2, en dat kan niet, aangezien a^2 en b^2 elk zeven verschillende cijfers hebben, in omgekeerde volgorde. Het eerste en laatste cijfer van a zijn dus niet gelijk. Dit betekent dat zowel a als b alleen de cijfers 1, 2 en 3 kan bevatten. De overgebleven mogelijkheden voor a zijn nu 1112, 1113, 1222, 1333, 2223 en 2333. De laatste drie mogelijkheden vallen meteen af omdat het kwadraat van b dan minstens 3200^2 is en dat heeft al acht cijfers. Uitproberen van de eerste drie mogelijkheden geeft $a = 1113$ als enige mogelijkheid. In dat geval geldt $a^2 = 1.238.769$, $b = 3111$ en $b^2 = 9.678.321$.