

Eerste ronde

Nederlandse Wiskunde Olympiade



16–27 januari 2023

- Beschikbare tijd: 2 uur (120 minuten).
- De A-vragen zijn vijfkeuzevragen. Bij elke vraag is één van de vijf mogelijkheden juist. Geef op het antwoordformulier duidelijk de letter van het goede antwoord aan. Voor een goed antwoord krijg je 2 punten, voor een fout antwoord 0 punten.
- Bij de B-vragen moet je een of meerdere getallen als antwoord geven. Voor een goed antwoord krijg je 5 punten en voor een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$ of 3^{100} .
- Je mag geen rekenmachine gebruiken, geen formulekaart; alleen pen en papier, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Na afloop van de wedstrijd lever je het antwoordformulier, dit opgavenvel en kladpapier in. Vanaf 28 januari zijn de opgaven en uitwerkingen te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.
- Veel succes!

A-vragen

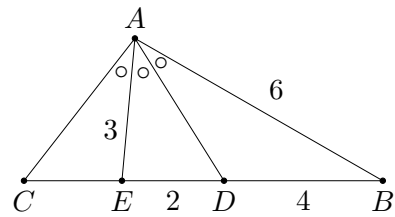
1. In het hokje met een C staat een elektriciteitscentrale. De hokjes met een X zijn plekken waar de centrale mee verbonden moet worden. Hiervoor zijn hoogspanningsmasten nodig die geplaatst kunnen worden in een hokje, aangegeven met de letter M . Er kan een kabel gespannen worden tussen twee hokjes met een letter als de hokjes met een zijde of een hoekpunt aan elkaar grenzen. Uiteindelijk moet elk hokje met een X verbonden zijn met de centrale via één of meer hokjes met de letters M of X .

| | | | | |
|-----|--|-----|--|-----|
| X | | X | | X |
| | | | | |
| X | | | | X |
| | | | | |
| X | | C | | X |

Hoeveel hoogspanningsmasten moeten er minimaal geplaatst worden?

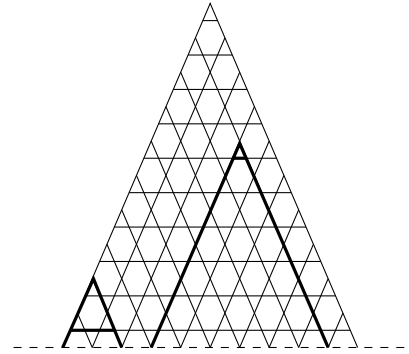
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 8 E) 9
2. In een speelgoedwinkel zijn aan het begin van de dag 20 stickervellen (0,30 euro per stuk), 18 voetballen (3 euro per stuk), 5 knuffelberen (5 euro per stuk) en 8 waterpistolen (15 euro per stuk) op voorraad. De nieuwe kassamedewerker maakt een rommeltje van de administratie en rapporteert aan het eind van de dag over de verkoop van deze vier artikelen alleen het totaalbedrag van 75,80 euro en dat er minder voetballen zijn verkocht dan elk ander artikel. Hoeveel knuffelberen zijn er verkocht?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
3. Een schaakbord bestaat uit 8×8 velden. Op een veld in de hoek staat een paard. Het paard maakt sprongen van ofwel twee velden horizontaal en een veld verticaal, ofwel twee velden verticaal en een veld horizontaal. In elk veld van het schaakbord schrijven we op hoeveel sprongen het paard nodig heeft om het te bereiken. Welk getal hebben we dan het meest opgeschreven?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. We hebben een driehoek $\triangle ABC$ en twee punten D en E op het lijnstuk BC , zodanig dat $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$. Verder is $|AB| = 6$, $|BD| = 4$, $|DE| = 2$ en $|EA| = 3$. Zie het plaatje hiernaast: let op, dat is niet op schaal getekend!



Wat is de lengte van het lijnstuk CE ?

- A) 2 B) $2\frac{1}{4}$ C) $2\frac{1}{2}$ D) $2\frac{3}{4}$ E) 3
5. In de figuur hiernaast zie je heel vaak de hoofdletter A. Een hoofdletter A kan op veel manieren geschreven worden: bij twee benen die in de top van de A samenkomen, kunnen we kiezen op welke hoogte we het horizontale streepje tussen de benen zetten. De benen van alle letters moeten daarbij op de stippellijn staan. Twee van deze hoofdletters A zijn dikgedrukt in de figuur: links een A met het streepje vrij laag, rechts een A met het streepje heel hoog. Hoeveel hoofdletters A zijn er in deze figuur te vinden?



- A) 55 B) 110 C) 220 D) 275 E) 550
6. Aan een ronde tafel zitten 2023 personen. Elke persoon is ofwel een schurk ofwel een ridder. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. De eerste persoon zegt: “Er zit minstens één schurk aan deze tafel.” De persoon links ernaast zegt: “Er zit minstens één ridder aan deze tafel.” De derde zegt: “Er zitten minstens twee schurken aan deze tafel.” De vierde zegt: “Er zitten minstens twee ridders aan deze tafel.” Dit gaat zo verder, tot de laatste persoon aan tafel zegt: “Er zitten minstens 1012 schurken aan deze tafel.” De eerste persoon, die net al een uitspraak heeft gedaan, zegt nu: “Er zitten minstens 1012 ridders aan deze tafel.” Hoeveel schurken zitten er aan de tafel?

- A) 505 B) 506 C) 1011 D) 1012 E) 1507

7. Hoeveel tweetallen van positieve gehele getallen a en b met $a < b$ zijn er zodat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{15}?$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. Anna, Bella en Celine gaan kleuren. Er zijn zes potloden, met verschillende kleuren. Ze verdelen de potloden onder elkaar, zodanig dat iedereen minimaal één potlood krijgt. Op hoeveel verschillende manieren kunnen ze de potloden verdelen?

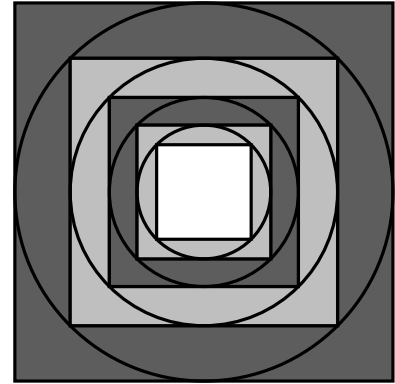
- A) 537 B) 540 C) 720 D) 729 E) 1170

B-vragen

1. Albert maakt een rijtje getallen, waarvan de eerste 2023 precies de getallen 1 tot en met 2023 zijn, in een of andere volgorde. Om elk volgend getal te bepalen, neemt Albert de *mediaan* van de 2023 voorgaande getallen. Je vindt de mediaan van 2023 getallen door ze op grootte te sorteren en van dat rijtje precies het middelste getal te nemen. Hoeveel verschillende waarden kan het drieduizendste getal van Alberts rij hebben?

2. Voor een positief geheel getal van drie cijfers kunnen we de drie cijfers met elkaar vermenigvuldigen. De uitkomst hiervan noemen we het *cijferproduct* van dat getal. Zo heeft 123 cijferproduct $1 \times 2 \times 3 = 6$ en 524 cijferproduct $5 \times 2 \times 4 = 40$. Een getal kan niet met het cijfer 0 beginnen. Bepaal het driecijferige getal dat precies vijfmaal zo groot is als zijn eigen cijferproduct.

3. In een vierkant wordt de ingeschreven cirkel getekend, waarin een ingeschreven vierkant wordt getekend waarvan de zijdes evenwijdig zijn aan de zijdes van het oorspronkelijke vierkant. Het gebied tussen deze vierkanten kleuren we donkergrijs. In het kleinere vierkant wordt weer de ingeschreven cirkel getekend met daarin weer een ingeschreven vierkant met evenwijdige zijden; het gebied hiertussen kleuren we lichtgrijs. We herhalen dit proces totdat er 2023 donkergrijze en 2023 lichtgrijze gebieden zijn. In het plaatje hiernaast zie je de eerste stappen getekend. Het binnenste vierkant blijft wit. De oppervlakte van alle donkergrijze gebieden samen is precies 1.



Hoe groot is de oppervlakte van alle lichtgrijze gebieden samen?

4. Een positief geheel getal a bestaat uit vier cijfers, waarvan er drie gelijk aan elkaar zijn. Het kwadraat van a bestaat uit zeven cijfers, die allemaal verschillend zijn. Getal b ontstaat door getal a van achteren naar voren te lezen. Het blijkt dat getal b groter is dan a . Daarnaast blijkt dat b^2 precies gelijk is aan a^2 van achteren naar voren gelezen. Vind alle mogelijkheden voor a .