Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 28 januari 2022

Uitwerking uitsmijter

Een palindroomgetal is een positief geheel getal dat van links naar rechts gelezen hetzelfde is als van rechts naar links gelezen. Hierbij begint een getal nooit met het cijfer 0. De getallen 3, 15351 en 153351 zijn bijvoorbeeld palindroomgetallen, maar 30 en 030 niet.

Bepaal alle palindroomgetallen n zodat $n + 2022$ ook een palindroomgetal is.

Antwoord.
$n = 9889$, $n = 9999$ en $n = 97979$.

Uitwerking.
We schrijven $m = n + 2022$.

Omdat n een palindroomgetal is en niet met het cijfer 0 begint, is het laatste cijfer van n (dat wil zeggen: het cijfer dat het aantal eenheden aangeeft) niet gelijk aan 0. Daarom is het laatste cijfer van m geen 2. Het eerste cijfer van m is gelijk aan het laatste cijfer, dus het eerste cijfer kan ook geen 2 zijn. Daaruit volgt dat $m \geqslant 3000$, dus $n \geqslant 978$.

Stel dat n een getal van drie cijfers is, dus $978 \leqslant n \leqslant 999$ en $3000 \leqslant m \leqslant 3021$. Dan is het eerste cijfer van n een 9, dus het laatste cijfer ook. Daaruit volgt dat m eindigt op een 1. Maar dan is m nooit een palindroomgetal, want m begint met een 3.

Er zijn dus geen palindroomgetallen n met drie of minder cijfers zodat $n + 2022$ ook een palindroomgetal is. Bekijk nu getallen n met $k \geqslant 4$ cijfers. Dan heeft $m = n + 2022$ ofwel k, ofwel $k + 1$ cijfers.

Stel dat $m = n + 2022$ een getal van k cijfers is. Noem a het eerste en het laatste cijfer van n. Als $k \geqslant 5$, dan is het eerste cijfer van $m = n+2022$ gelijk aan a of $a+1$, en het laatste cijfer van m gelijk aan $a + 2$ of $a - 8$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat m een palindroomgetal is. Er moet dus gelden dat $k = 4$.

We gebruiken de notatie $N = \overline{abcd}$ als N achtereenvolgens uit de cijfers a, b, c en d bestaat, dus $N = 1000a + 100b + 10c + d$, waarbij a eventueel ook 0 mag zijn.

Schrijf $m = \overline{abba}$ en $n = \overline{cddc}$ (met $a, c > 0$). Nu is $c \leqslant 7$, want anders zou m een getal van 5 cijfers zijn. Daaruit volgt dat $a = c + 2$, zodat $\overline{abba} = \overline{cbbc} + 2002$. Uit $\overline{abba} = \overline{cddc} + 2022$ volgt nu dat $\overline{bb} = \overline{dd} + 2$. De linkerkant is deelbaar door 11, terwijl de rechterkant rest 2 heeft bij deling door 11. Deze vergelijking heeft dus geen oplossingen.

We concluderen dat $m = n + 2022$ een getal van $k + 1$ cijfers is, en dus $n + 2022 = m \geqslant 10^k$. Daarom is $n \geqslant 10^k - 2022 = 99...997978$ (met $k - 4$ cijfers 9 aan het begin). Omdat het aantal cijfers van n gelijk is aan k, geldt ook dat $n \leqslant 99...999999$ (met k cijfers 9). De eerste $k - 4$ cijfers van n zijn dus gelijk aan 9. Omdat n een palindroomgetal is, zijn ook de laatste $k - 4$

cijfers van n gelijk aan 9. Als $k \geqslant 8$, dan horen alle cijfers bij de eerste $k-4$ of bij de laatste $k-4$, dus zijn alle cijfers gelijk aan 9. Dan is $n + 2022 = 99...99 + 2022 = 100...002021$. Dat is nooit een palindroomgetal voor $k \geqslant 8$.

We weten nu dus dat $4 \leqslant k \leqslant 7$ en dat de eerste $k-4$ en de laatste $k-4$ cijfers van n een 9 zijn.

Stel dat $k = 4$. Omdat $n + 2022 \leqslant 9999 + 2022 = 12021$, begint m met het cijfer 1. Daarom eindigt m ook op een 1, zodat n met een 9 moet beginnen en eindigen. Schrijf $n = \overline{9aa9}$ en $m = \overline{1bcb1}$. Dan is $\overline{1bcb1} = \overline{9aa9} + 2022 = \overline{aa0} + 11031$, zodat $\overline{bcb} = \overline{aa} + 103$. Omdat $103 \leqslant \overline{aa} + 103 \leqslant 202$ is $b = 1$ of $b = 2$. Met $b = 1$ vinden we dat $\overline{1c1} = \overline{aa} + 103$, ofwel $\overline{c0} = \overline{aa} + 2$, zodat $a = 8$ en $c = 9$. Dit geeft de oplossing $\boxed{n = 9889}$ en $m = 11911$. Met $b = 2$ vinden we dat $\overline{2c2} = \overline{aa} + 103$, dus $\overline{c0} + 99 = \overline{aa}$, zodat $a = 9$ en $c = 0$. Dit geeft de oplossing $\boxed{n = 9999}$ en $m = 12021$.

Stel nu dat $k = 5$. Het eerste en het laatste cijfer van n zijn 9. We zien opnieuw dat m begint en eindigt met een 1. Schrijf $n = \overline{9aba9}$ en $m = \overline{1cddc1}$. Nu is $\overline{1cddc1} = m = n + 2022 = \overline{9aba9} + 2022 = \overline{aba0} + 92031$, dus $\overline{cddc} + 797 = \overline{aba}$. Hieruit volgt dat $c = 0$, zodat $a = 7$. Nu hebben we $\overline{dd} + 9 = \overline{b}$, dus $b = 9$ en $d = 0$. Dit geeft de oplossing $\boxed{n = 97979}$ en $m = 100001$.

Als $k = 6$, dan begint en eindigt n met twee negens. Daarom eindigt $m = n + 2022$ op 21, en begint m dus met 12. Schrijf $m = \overline{12bcb21}$ en $n = \overline{99aa99}$. Dan is $\overline{12bcb21} = \overline{99aa99} + 2022 = 992121 + \overline{aa00}$ en dus $\overline{aa} = \overline{bcb} + 2079$. Dit heeft geen oplossingen.

Ten slotte bekijken we $k = 7$. Nu begint en eindigt n met drie negens, zodat m eindigt op 021. Schrijf $n = \overline{999a999}$ en $m = \overline{120bb021}$. Hieruit volgt dat $\overline{120bb021} = \overline{999a999} + 2022 = 9993021 + \overline{a000}$, dus $\overline{a} = \overline{bb} + 2007$. Ook dit heeft geen oplossingen.

Er zijn dus drie palindroomgetallen n zodat $n + 2022$ ook een palindroomgetal is: $n = 9889$, $n = 9999$ en $n = 97979$.