Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

17 januari – 27 januari 2022

Uitwerkingen

A1. C) 12 Het verschil tussen de oppervlaktes van het grote en het middelgrote eiland is 1 km^2 meer dan de oppervlakte van het kleine eiland. Oftewel, de oppervlakte van het middelgrote eiland plus de oppervlakte van het kleine eiland is 1 km^2 minder dan de oppervlakte van het grote eiland. Dus alle drie de oppervlaktes van de eilanden bij elkaar opgeteld is 1 km^2 minder dan twee keer de oppervlakte van het grote eiland. Twee keer de oppervlakte van het grote eiland is dus $23 + 1 = 24$, en het grote eiland heeft een oppervlakte van 12 km^2.

A2. C) 14 Als Kevin n lijnen tekent, dan wordt de hoek van 360° bij het punt P verdeeld in $2n$ stukken. Zou hij 13 lijnen tekenen met gelijke hoeken tussen de opeenvolgende lijnen, dan is die hoek precies $\frac{1}{26} \cdot 360° = 13\frac{11}{13}°$. We zien dat 13 lijnen dus niet genoeg zijn. Zou Kevin 14 lijnen tekenen met telkens minstens 13° tussen de opeenvolgende lijnen, dan zijn de 28 hoeken samen $28 \cdot 13° = 364°$ en dat kan niet. Bij 14 lijnen weet je dus zeker dat er een hoek is van minder dan 13°.

A3. C) 70 In zes opeenvolgende jaren is de leeftijd van oma een geheel veelvoud van de leeftijd van haar kleindochter Sofie. In het eerste jaar van die zes opeenvolgende jaren noemen we de leeftijd van oma g en die van Sofie s. Dan is g deelbaar door s, maar ook $g - s$ is dan deelbaar door s. In het volgende jaar is de leeftijd van oma $g + 1$ en die van Sofie $s + 1$. Dan is $g + 1$ deelbaar door $s + 1$, maar $(g + 1) - (s + 1) = g - s$ is ook deelbaar door $s + 1$. Het jaar erna is de leeftijd van oma $g + 2$ en van Sofie $s + 2$. Dan is $g + 2$ deelbaar door $s + 2$ en ook $(g + 2) - (s + 2) = g - s$ is deelbaar door $s + 2$.

Als we zo nog drie jaar verder gaan, vinden we dat $g - s$ deelbaar is door de opeenvolgende getallen s, $s + 1$, $s + 2$, $s + 3$, $s + 4$ en $s + 5$. Als hierbij de getallen 5, 6 en 7 zitten, dan zou $g - s$ minstens $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ zijn en is oma dus meer dan 210 jaar oud. Dat kan niet. Als s minstens 6 is (zodat 5 er niet meer bij zit) en maximaal 9, dan heb je de getallen 9, 10 en 11 erbij zitten en is oma meer dan 990 jaar oud. Is s minstens 10 en maximaal 13, dan heb je 13, 14 en 15 en zou oma nog ouder moeten zijn. Enzovoorts. De enige realistische optie is dus juist om $s = 1$ nemen, zodat het gaat om de getallen 1 t/m 6. (Merk op dat $s = 0$ niet kan, want dan zijn Sofie en oma allebei 0 jaar oud.) Nu moet $g - s$ in elk geval een veelvoud van $5 \cdot 6 = 30$ zijn. Dat is niet deelbaar door 4, dus moet $g - s$ zelfs een veelvoud van 60 zijn. Inderdaad is dat deelbaar door de getallen 1 t/m 6. (We noemen dit overigens het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* van deze getallen.) We concluderen dat $g - s = 60$, want als $g - s = 120$ of een nog groter veelvoud van 60, dan is oma onmenselijk oud.

Aangezien $g - s = 60$ en $s = 1$, is oma in het eerste jaar 61 jaar oud en Sofie 1. Inderdaad is 61 een veelvoud van 1. Verder is 62 is een veelvoud van 2, 63 een veelvoud van 3, 64 een veelvoud van 4, 65 een veelvoud van 5, en 66 een veelvoud van 6. In het zevende jaar krijgen we 67, wat geen veelvoud is van 7. In de twee jaren daarna krijgen we met 68 en 69 geen veelvoud van 8 respectievelijk 9. Maar als oma 70 is, is Sofie 10, en zijn hun leeftijden weer een veelvoud van elkaar.

A4. E) 56 Voor de vier cijfers van het getal zijn er niet zo heel veel mogelijkheden. We gaan ze allemaal af.

Een keer 6 en drie keer 0. Een viercijferig getal kan niet met een 0 beginnen, dus hier is maar 1 mogelijkheid.

Een keer 5, een keer 1 en twee keer 0. We kunnen beginnen met de 1 en dan zijn er voor de positie van de 5 nog 3 mogelijkheden. Andersom kunnen we ook beginnen met de 5 en dan zijn er voor de positie van de 1 nog 3 mogelijkheden. Samen zijn er dus $3+3=6$ manieren.

Een keer 4, een keer 2, en twee keer 0. Met precies dezelfde argumentatie als in het vorige geval zijn er 6 mogelijkheden.

Een keer 4, twee keer 1 en een keer 0. Voor de 0 kiezen we een positie niet aan het begin; dat kan op 3 manieren. Voor de 4 zijn er dan nog 3 mogelijkheden over en de andere twee cijfers zijn een 1. In totaal dus $3\times3=9$ mogelijkheden.

Twee keer 3 en twee keer 0. We moeten met een 3 beginnen. Voor de andere 3 zijn nog drie posities; dit kan dus op 3 manieren.

Een keer 3, een keer 2, een keer 1 en een keer 0. Er zijn 3 mogelijkheden voor de 0, dan nog 3 mogelijkheden voor de 1, nog 2 voor de 2 en het overgebleven cijfer moet dan wel een 3 zijn. Dit zijn dus $3\times3\times2=18$ mogelijkheden.

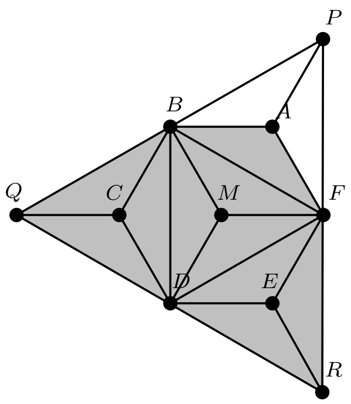
Een keer 3 en drie keer 1. De 3 kan op elk van de vier mogelijke posities, de overige cijfers zijn dan 1'en. Dit kan op 4 manieren.

Drie keer 2 en een keer 0. De 0 moet op een van de laatste drie posities komen; dat kan op 3 manieren.

Twee keer 2 en twee keer 1. Voor de eerste 1 kunnen we 4 mogelijke posities kiezen en voor de tweede 1 nog 3. Maar let op: we hebben elke mogelijkheid voor beide 1'en dan dubbel geteld (want het maakt niet uit welke 1 de eerste is). Er zijn dus $\frac{1}{2}\times4\times3=6$ mogelijkheden.

In totaal hebben we $1+6+6+9+3+18+4+3+6=56$ oplossingen gevonden.

A5. C) $\frac{6}{5}$ We tekenen het middelpunt M van de driehoek, dat ook het middelpunt van de zeshoek is. Teken vanuit M lijnstukken naar de hoekpunten B, F en D van de zeshoek. Teken ook de lijnstukken AP, CQ en ER. Omdat de driehoek gelijkzijdig is en de zeshoek regelmatig, is elk van die zes lijnstukken een deel van een spiegellijn van de driehoek, die ook een spiegellijn van de zeshoek is. We tekenen ten slotte de driehoek BFD. Nu hebben we de grote driehoek in twaalf kleine driehoekjes verdeeld, zoals je hiernaast kan zien.



Vanwege de symmetrie van de figuur zijn al deze driehoekjes congruent: het zijn gelijkbenige driehoeken met hoeken van 30°, 30° en 120° en hun basiszijde is telkens even lang als de helft van de zijde van de grote driehoek. De grijze vijfhoek heeft een oppervlakte van 10 driehoekjes en de grote driehoek heeft een oppervlakte van 12 driehoekjes. De oppervlakte van de grote driehoek is dus $\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$.

A6. D) 70 Stel dat er R rode ballen, B blauwe ballen en W witte ballen in de bak zitten. Uit de opgave volgt dan dat

$$W+B=4R \quad \text{en} \quad R+B=6W.$$

Er zijn diverse manieren om dit verder op te lossen: we geven er hier eentje. Als we de ene vergelijking van de andere aftrekken, vinden we dat $W-R=4R-6W$, oftewel $7W=5R$. Omdat 7 een priemgetal is en 5 niet deelbaar door 7 is, moet R wel deelbaar door 7 zijn. Bovendien moet R ook even zijn, dus R is een veelvoud van 14. Als we $R=14$ nemen, krijgen we achtereenvolgens $W=\frac{5}{7}R=10$ en $B=4R-W=46$. Als we R groter dan 14 nemen, dan is R minstens 28 en vinden we dat W minstens 20 is en B minstens 92. Er is echter gegeven dat het totale aantal ballen kleiner is dan 100, dus dit kan niet en R moet wel 14 zijn. In totaal zitten er dan $14+10+46=70$ ballen in de bak.

A7. B) C won van B Team A won in de eerste en in de derde ronde, en verloor dus in de tweede ronde. Team C won in de eerste ronde en speelde toen dus niet tegen team A. Team D verloor in de tweede ronde en speelde toen dus niet tegen team A. Team D verloor ook de eerste ronde, want toen wonnen A en C, dus team D moet de laatste ronde gewonnen hebben. Dan won ook team A, dus de wedstrijd tussen A en D was in de eerste ronde. De andere wedstrijd in de eerste ronde was die tussen teams B en C, waar C won.

A8. A) 1 Op de onderste dobbelsteen zien we aan de voorkant 3 ogen, dus op de achterkant staat de 4. Op de rechterkant van de onderste dobbelsteen kan dus nog 1, 2, 5 of 6 staan. Met 5 of 6 moet het totaal aantal ogen aan de achterkant minstens 15 of 18 zijn, en dat kan niet. Als er een 1 op de rechterzijkant staat, dan staat aan de bovenkant een 2 (kijk maar in het plaatje) en dus moet er bij de bovenste dobbelsteen onderop een 7 staan. Ook dat kan niet. Er staat dus een 2 op de rechterkant van de onderste dobbelsteen. Op het vlak dat de grond raakt, staat dus een 1.

Ter controle kijken we naar de rest van het torentje. Op de bovenkant van de onderste dobbelsteen vinden we nu de 6, dus op de onderkant van de bovenste dobbelsteen staat een 3. Er zijn dan nog vier manieren waarop we de bovenste dobbelsteen kunnen plaatsen. We weten dat het totaal aantal ogen aan de achterkant van het torentje drie keer zo veel is als het totaal aantal ogen aan de rechterkant van het torentje. Uitproberen geeft dat op de rechterkant van de bovenste dobbelsteen een 1 staat en op de achterkant een 5. Inderdaad is $3 \cdot (2 + 1) = 4 + 5$.

B1. 17 Als we twee van de getallen van 1 t/m 15 bij elkaar optellen, kunnen we nooit een kwadraat krijgen groter dan $25 = 5^2$. We kunnen voor alle getallen uitproberen hoeveel we erbij op moeten tellen om een volgend kwadraat te krijgen, en op hoeveel manier dat kan. Begin bijvoorbeeld met 5: hier kan je 4 bij optellen, dan krijg je $5 + 4 = 9 = 3^2$, of je kan er 11 bij optellen, dan krijg je $5 + 11 = 16 = 4^2$. Meer mogelijkheden zijn er niet: om het volgende kwadraat te krijgen, heb je een getal groter dan 15 nodig. Dit betekent dat 5 tussen 4 en 11 in de rij komt te staan.
Als we dit voor alle getallen afgaan, zien we dat bijna alle getallen minstens twee mogelijkheden hebben om een kwadraat te maken. Uitzonderingen zijn 8 en 9, daarbij kan het maar op één manier: $8 + 1 = 9 = 3^2$ en $9 + 7 = 16 = 4^2$. De getallen 8 en 9 komen dus aan de twee uiteindes van de rij. Als we het eerste en laatste getal bij elkaar optellen, krijgen we dus $8 + 9 = 17$. Met een beetje proberen vinden we dat er maar één mogelijkheid is voor de hele rij:

$$9 \quad 7 \quad 2 \quad 14 \quad 11 \quad 5 \quad 4 \quad 12 \quad 13 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 1 \quad 8$$

B2. $4\frac{1}{2}$ De straal van de cirkel is 3. Het kleine vierkant kunnen we langs de diagonaal opdelen in twee driehoeken. Met de lange zijde (lengte 6) als basis hebben deze een hoogte van 3 en dus een oppervlakte van $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$. De vier kleine driehoeken aan de buitenkant hebben dus samen een oppervlakte van $36 - 2 \cdot 9 = 18$. Dus de grijze driehoek heeft oppervlakte $\frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$.

B3. 117 Laten we eerst kijken naar het aantal paren kennissen tussen wiskundigen en biologen. Noem het aantal wiskundigen w en het aantal biologen b. Omdat iedere wiskundige vier biologen kent, is het totaal aantal kennissen van de wiskundigen onder de biologen gelijk aan $4w$. Aan de ander kant kent iedere bioloog negen wiskundigen, dus het totaal aantal kennissen van de biologen onder de wiskundigen is $9b$. Deze twee aantallen moeten aan elkaar gelijk zijn, dus $4w = 9b$ oftewel $b = \frac{4}{9}w$.

Verder weten we dat iedere wiskundige precies twee keer zoveel mensen kent als iedere bioloog. Een wiskundige kent alle $w-1$ andere wiskundigen plus vier biologen, dus in totaal $w+3$ mensen. Een bioloog kent alle $b - 1$ andere biologen plus negen wiskundigen, dus $b + 8$ mensen. Nu kent iedere wiskunde precies twee keer zoveel mensen als iedere bioloog, dus $w + 3 = 2 \cdot (b + 8)$ oftewel $w = 2b + 13$. Vullen we hier in dat $b = \frac{4}{9}w$, dan zien we dat $w = 2 \cdot \frac{4}{9}w + 13$ en oplossen van die vergelijking geeft $w = 117$.

B4. 29 Er is precies een kever die nergens heen kruipt, de kever helemaal linksonder. Alle andere kevers moeten ofwel een vakje naar links, ofwel een vakje naar rechtsonder kruipen. Er kunnen hooguit twee kevers op hetzelfde vakje uitkomen. Op het bord hieronder zijn de kevers ingedeeld in groepen waarbinnen de kevers samen op één vakje terecht kunnen komen: bijvoorbeeld de kever linksboven op het vakje met een N kan samenkomen met de kever van het vakje met de N in de tweede rij. Maar het zou ook kunnen dat kever N van de tweede rij juist samenkomt met kever N van de derde rij.

N	O	P	Q	R	S	T	U
L	M	N	O	P	Q	R	S
J	K	L	M	N	O	P	Q
H	I	J	K	L	M	N	O
F	G	H	I	J	K	L	M
D	E	F	G	H	I	J	K
B	C	D	E	F	G	H	I
A	A	B	C	D	E	F	G

In groep N zijn er vier kevers, die dus twee aan twee samen zouden kunnen komen. In sommige andere groepen is er een oneven aantal kevers, waardoor er in die groepen een kever alleen over blijft. Dit geldt voor groepen T, U (deze kevers kunnen niet samenkomen met een andere), D, E, P, Q (hier zijn er steeds drie kevers, waarvan er twee samen kunnen komen en minstens één alleen achterblijft).

Er zijn dus minstens 6 vakjes met slechts één kever en dus hooguit $\frac{1}{2}(64 - 6) = 29$ vakjes met twee kevers. Voor elk vakje met twee kevers is er ook een vakje leeg achtergebleven, dus er zijn hooguit 29 lege vakjes. Uit de uitleg hiervoor volgt dat het ook daadwerkelijk kan gebeuren dat er 29 vakjes onbezet raken.