Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 26 januari 2018

Uitwerking uitsmijter

In een toernooi met n spelers speelt elke speler een wedstrijd tegen elk van de andere spelers. In elke wedstrijd krijgt de winnaar 1 punt, de verliezer 0 punten, en bij gelijkspel krijgt ieder een halve punt. Aan het eind van het toernooi wordt een ranglijst opgesteld op basis van het totaal aantal punten dat elke speler gehaald heeft.

(a) De toernooiadministrateur telt de totaalscores van alle spelers bij elkaar op, maar slaat daarbij per ongeluk één speler over. Hij komt op een totaal van 190 punten. Bepaal alle mogelijke waarden van n waarbij dit kan gebeuren.

(b) Bij een ander toernooi blijkt dat elke speler precies de helft van zijn punten verdiend heeft in wedstrijden tegen de tien spelers die eindigen met het minste aantal punten. (In het bijzonder heeft dan elk van de tien spelers met het minste aantal punten de helft van z'n punten verdiend tegen de andere negen van de tien.) Bepaal alle mogelijke waarden van n waarbij dit kan gebeuren.

Antwoorden.

(a) $n = 20$ of $n = 21$

(b) $n = 25$

Uitwerking.
In elk wedstrijd wordt in totaal 1 punt uitgedeeld aan de twee spelers: ofwel 0 aan de verliezer en 1 aan de winnaar, ofwel $\frac{1}{2}$ aan beide spelers. Verder weten we dat als k spelers tegen elkaar spelen en daarbij elk tweetal één wedstrijd tegen elkaar speelt, er $\frac{1}{2}k(k-1)$ wedstrijden zijn.

(a) Er zijn in het hele toernooi $\frac{1}{2}n(n-1)$ wedstrijden. Elke speler heeft aan het eind van het toernooi $n-1$ wedstrijden gespeeld en dus minstens 0 en hoogstens $n-1$ punten. Dat geldt ook voor de speler die door de toernooiadministrateur vergeten is. Het totaal aantal punten is dus minstens 190 en hoogstens $190 + n - 1$. We vinden de ongelijkheden

$$190 \leqslant \tfrac{1}{2}n(n-1) \leqslant 189 + n.$$

De linkerongelijkheid geeft $n^2 - n \geqslant 380$, dus $(n-20)(n+19) \geqslant 0$, waaruit volgt dat $n \geqslant 20$ of $n \leqslant -19$. De rechterongelijkheid geeft $n^2 - n \leqslant 378 + 2n$ dus $n^2 - 3n - 378 \leqslant 0$, dus $(n-21)(n+18) \leqslant 0$, waaruit volgt dat $-18 \leqslant n \leqslant 21$. De twee ongelijkheden geven samen dus $20 \leqslant n \leqslant 21$. Als $n = 20$ zijn er in totaal 190 punten gehaald en is er een speler vergeten die 0 punten had. Als $n = 21$ zijn er in totaal 210 punten gehaald en is er een speler vergeten die 20 punten had (dus van alle anderen gewonnen had). Beide opties zijn dus mogelijk.

(b) De $n-10$ beste spelers hebben de helft van hun punten verdiend in wedstrijden tegen de zwakste tien spelers en de andere helft dus in wedstrijden tegen elkaar. Als we alle punten van deze onderlinge wedstrijden bij elkaar nemen, hebben we dus precies de helft van het totaal aantal punten van de beste $n-10$ spelers. Dit zijn $\frac{1}{2}(n-10)(n-11)$ punten. De zwakste tien spelers hebben op hun beurt de helft van hun punten in onderlinge wedstrijden verdiend; dat gaat om $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$ punten. Het totaal aantal punten in het toernooi is daarom

$$2 \cdot \tfrac{1}{2}(n-10)(n-11) + 2 \cdot 45 = n^2 - 21n + 200.$$

Anderzijds weten we dat het totaal aantal punten in het toernooi $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ is. Dit gelijkstellen aan elkaar geeft de vergelijking $2n^2 - 42n + 400 = n^2 - n$, oftewel $n^2 - 41n + 400 = 0$, dus $(n-16)(n-25) = 0$, dus $n = 16$ of $n = 25$.

Stel nu dat het aantal spelers 16 is. Dan is het totaal aantal punten in het toernooi $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$, terwijl de zwakste tien spelers samen 90 punten hebben. De zwakste spelers hebben dus gemiddeld 9 punten per persoon, terwijl de beste zes spelers gemiddeld $\frac{30}{6} = 5$ punten per persoon verdiend hebben. Dat is onmogelijk. Het aantal spelers kan dus geen 16 zijn.

We laten nog zien dat 25 spelers wel echt kan. Noem de spelers A_1 tot en met A_{15} en B_1 tot en met B_{10}. Laat alle A-spelers onderling gelijkspelen en alle B-spelers onderling gelijkspelen. Bij een wedstrijd tussen een A- en een B-speler wint de A-speler of spelen ze gelijk. In onderstaand schema is te zien welke wedstrijden er gewonnen (W) worden.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
B_1	W	W	W	W	W	W									
B_2	W	W	W	W	W	W									
B_3				W	W	W	W	W	W						
B_4				W	W	W	W	W	W						
B_5							W	W	W	W	W	W			
B_6							W	W	W	W	W	W			
B_7										W	W	W	W	W	W
B_8										W	W	W	W	W	W
B_9	W	W	W										W	W	W
B_{10}	W	W	W										W	W	W

Nu heeft elke A-speler $14 \cdot \frac{1}{2} = 7$ punten tegen andere A-spelers verdiend en $4 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 7$ punten tegen B-spelers. Elke B-speler heeft $9 \cdot \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ punten tegen andere B-spelers verdiend en $6 \cdot 0 + 9 \cdot \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ punten tegen A-spelers. Alle A-spelers staan met 14 punten boven alle B-spelers met 9 punten. Dit scoreverloop voldoet dus aan alle voorwaarden.

We concluderen dat alleen 25 spelers mogelijk is.