Een Eerbetoon aan de Wiskunde Olympiade

Een werkstuk om de wiskunde olympiade toegankelijker te maken voor leerlingen op het voortgezet onderwijs.

Joseph Thomas
tinynerd001@gmail.com

Joop van der Vaart

30 november 2022

Inhoudsopgave

1 De Nederlandse Wiskunde Olympiade **1**
1.1 Wat is het? . . . 1
1.2 Internationale rondes . . . 1
1.2.1 Benelux Mathematical Olympiad . . . 1
1.2.2 European Girls' Mathematical Olympiad . . . 1
1.2.3 International Mathematical Olympiad . . . 1
1.3 Hoe werkt de selectieproces? . . . 1
1.3.1 Eerste ronde . . . 1
1.3.2 Regionale tweede ronde . . . 2
1.3.3 Finaletraining en finale . . . 2
1.3.4 Prijsuitreiking . . . 2
1.3.5 Beloftenprogramma . . . 2
1.3.6 Junior Wiskunde Olympiade . . . 2
1.3.7 Training en selectie . . . 2
1.4 FAQ . . . 3
1.4.1 Hoe worden opgaven gemaakt? . . . 3
1.4.2 Hoe worden opgaven geselecteerd? . . . 3
1.4.3 Hoe worden gemaakte toetsen nagekeken? . . . 3
1.4.4 Wat is nog algemeen advies om goed te scoren? . . . 3
1.4.5 Wat mag je gebruiken qua hulpmiddelen? . . . 3

2 Hoe werkt dit werkstuk? **4**
2.1 Indeling van Opgaven . . . 4
2.2 Stappenplan . . . 4
2.3 Over het Lezen van Uitwerkingen . . . 5
2.4 Nog meer FAQ . . . 5
2.4.1 Hoe lang moet je werken aan een opgave? . . . 5
2.4.2 Hoe word je goed in olympiade opgaven? . . . 5
2.4.3 Waarom heb ik niet zoveel inzicht als anderen? . . . 6
2.4.4 Is wiskunde nuttig? . . . 6
2.4.5 Hoe schrijf je een goede oplossing? . . . 6

3 Heuristiek **7**
3.1 Doelen . . . 7
3.2 Kleine Gevallen Proberen . . . 7
3.3 Tekening maken . . . 7
3.4 Alles Opschrijven . . . 8
3.5 Alle Informatie Gebruiken . . . 8
3.6 Analyseer de Gegeven Informatie . . . 8
3.7 Polya-Methode . . . 8
3.8 Invariantie . . . 9

4 Notatie **10**

5 Meetkunde **11**
5.1 Voorkennis . . . 11
5.2 Kort over GeoGebra . . . 14
5.3 Opgaven . . . 15
5.3.1 Hoofdopgaven . . . 15
5.3.2 Toets 1 (4 uur) . . . 17
5.3.3 Toets 2 (3 uur) . . . 18
5.3.4 Toets 3 (3,5 uur) . . . 19
5.3.5 Toets 4 (4 uur) . . . 21
5.3.6 Toets 5 (3 uur) . . . 22
5.3.7 Toets 6 (4 uur) . . . 24
5.4 En verder... . . . 26
5.4.1 Parmenides51 . . . 26
5.4.2 YouTube . . . 26
5.4.3 Werkbladen . . . 26

5.4.4 Boeken 27
5.4.5 Laatste woord... 27

6 Hints **28**

7 Lessen **29**

1 De Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tekst onder koppen "Wat is het?", "Internationale rondes" en "Hoe werkt de selectieproces?" zijn gekopieerd uit de Wiskunde Olympiade website: https://www.wiskundeolympiade.nl/

1.1 Wat is het?

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht.

1.2 Internationale rondes

Jaarlijks neemt Nederland deel aan drie internationale wiskundewedstrijden. Naar elk van deze wedstrijden wordt een team afgevaardigd dat bestaat uit de beste Nederlandse scholieren. Deze scholieren worden geselecteerd uit de finalisten van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

1.2.1 Benelux Mathematical Olympiad

De Benelux Mathematical Olympiad (BxMO) is een derby tussen België, Luxemburg en Nederland. De wedstrijd vindt sinds 2009 jaarlijks in één van deze landen plaats. Elk land mag een team van tien deelnemers afvaardigen. Het evenement vindt plaats in een weekend, waarvan op zaterdag de daadwerkelijke wedstrijd plaatsvindt. De deelnemers werken op deze dag aan vier opgaven in vierenhalf uur.

1.2.2 European Girls' Mathematical Olympiad

Om meisjes extra te stimuleren om aan de Wiskunde Olympiade mee te doen, is in 2012 de European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) geïntroduceerd. Hieraan doen zo'n veertig landen mee met elk een team bestaande uit vier meisjes. De wedstrijd beslaat twee dagen en op elk van deze dagen krijgen de leerlingen in vierenhalf uur drie opgaven voor hun kiezen. Het hele evenement duurt zeven dagen. In 2020 is de EGMO voor het eerst door Nederland georganiseerd. Vanwege de coronapandemie heeft het evenement als wedstrijd-op-afstand plaatsgevonden.

1.2.3 International Mathematical Olympiad

De International Mathematical Olympiad (IMO) is de meest prestigieuze wiskundewedstrijd voor scholieren en bestaat al sinds 1959. Aan dit jaarlijks terugkerende evenement nemen zo'n honderd landen deel, die allemaal vertegenwoordigd worden door de beste zes scholieren uit dat land. Het Nederlandse team wordt jaarlijks ook gehuldigd door de minister van Onderwijs, samen met de teams van de andere bètaolympiades. De wedstrijd beslaat twee dagen en op elk van deze dagen krijgen de leerlingen in vierenhalf uur drie opgaven voor hun kiezen. Het hele evenement duurt negen dagen. In 2011 werd de IMO voor het eerst in Nederland georganiseerd.

1.3 Hoe werkt de selectieproces?

Er zijn drie rondes. De eerste ronde vindt plaats in januari, de tweede ronde in maart en de finale in september (in het volgende schooljaar).

1.3.1 Eerste ronde

De eerste ronde vindt eind januari plaats op je eigen school. Je krijgt twee uur de tijd om de antwoorden te vinden bij een aantal opgaven. Er zijn acht vijfkeuze-opgaven en vier open opgaven met een exact getal als uitkomst. Je hoeft geen bewijs of uitwerking te geven. Sommige opgaven zijn gemakkelijk, andere lastig tot zeer lastig. De opgaven laten iets zien van ongebruikelijke wiskunde en kunnen met een gezonde dosis creativiteit en doorzettingsvermogen opgelost worden. Alle deelnemers uit het hele land krijgen dezelfde opgaven. Je docent corrigeert het werk aan de hand van een correctieformulier en stuurt de resultaten op.

Als je bij de (ongeveer) 1000 deelnemers met de hoogste resultaten zit, dan krijg je een uitnodiging om aan de tweede ronde mee te doen. Bij de selectie houden we rekening met de categorie waarin je zit. Er zijn drie categorieën:

- onderbouw,
- vierde klas,

- vijfde klas.

Leerlingen uit de onderbouw hebben minder punten nodig om door te gaan naar de tweede ronde dan leerlingen uit de vierde klas, en zij weer minder dan leerlingen uit de vijfde klas.

1.3.2 Regionale tweede ronde

De tweede ronde wordt gehouden op een aantal Nederlandse universiteiten. De tweede ronde is vanzelfsprekend moeilijker dan de eerste ronde. Er zijn geen meerkeuze-opgaven meer en bij een aantal opgaven moet je niet alleen de uitkomst geven, maar ook je uitwerking. De (ongeveer) 130 beste leerlingen uit het land worden vervolgens uitgenodigd voor de finale en de training voor de finale. Ook hier wordt weer rekening gehouden met de drie categorieën.

1.3.3 Finaletraining en finale

De finale wordt gehouden op de Technische Universiteit Eindhoven. Bij de finale krijg je ook een prijs voor je goede resultaat bij de tweede ronde.

De finale duurt drie uur en in die tijd moet je vijf opgaven oplossen. Bij elke opgave moet je een volledige berekening geven of een sluitend bewijs. Het is daarom goed om hier vooraf mee te oefenen. Dit gebeurt in de finaletraining die gegeven wordt op vier dagen in het voorjaar. Elke trainingsmiddag staat een van de vier katernen van het speciale trainingsboek centraal. Iedereen ontvangt deze bundel tegelijk met de uitnodiging voor de finale en de finaletraining. Als je meedoet met de training, verschijn je goed voorbereid bij de finale en dat maakt het meedoen een stuk leuker!

1.3.4 Prijsuitreiking

In november is de prijsuitreiking van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. In elke categorie krijgen de beste vijf deelnemers een prijs. De prijs bestaat uit een certificaat, enkele cadeaus en een geldbedrag. Samen met een aantal andere veelbelovende finalisten worden de prijswinnaars verder uitgenodigd om deel te nemen aan een speciaal trainingsprogramma voor de internationale wiskundewedstrijden waar Nederland een team naartoe afvaardigt: de Benelux Mathematical Olympiad, de European Girls' Mathematical Olympiad en de International Mathematical Olympiad.

1.3.5 Beloftenprogramma

Finalisten die zich niet gekwalificeerd hebben voor het trainingsprogramma voor de internationale wedstrijden, maar mogelijk met wat meer ervaring daar in de toekomst wel voor in aanmerking zouden kunnen komen, kunnen in de winter deelnemen aan het beloftenprogramma. Je wordt hiervoor uitgenodigd als je nog niet in de zesde klas zit en bij de finale een goede prestatie hebt neergezet, waarmee je hebt laten zien veel talent te hebben. Met het beloftenprogramma heb je de kans dit talent verder te ontwikkelen en kun je bovendien een plek in de volgende finale veilig stellen. Tussen november en maart krijg je enkele stukjes theorie en bijbehorende opgaven om je tanden in te zetten. Hoor je na afloop van het programma tot de beste deelnemers, dan krijg je een gegarandeerde finaleplaats in het volgende wedstrijdjaar.

1.3.6 Junior Wiskunde Olympiade

De Nederlandse Wiskunde Olympiade heeft ook nog een kleiner broertje: de Junior Wiskunde Olympiade. Dit is een wedstrijd voor onderbouwleerlingen, die jaarlijks in september of oktober plaatsvindt op de Vrije Universiteit Amsterdam. De beste 200 leerlingen van de Kangoeroewedstrijd worden uitgenodigd voor deze wedstrijd. Zie verder de eigen website van de Junior Wiskunde Olympiade.

1.3.7 Training en selectie

Na afloop van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade ontvangen de ca. dertig meest veelbelovende deelnemers een uitnodiging voor het trainingsprogramma voor de drie internationale olympiades. Dit trainingsprogramma loopt van november tot juni en bestaat uit het bijwonen van maandelijkse trainingsbijeenkomsten en het werken aan wekelijkse inleveropdrachten. Onder leiding van een oud-olympiadedeelnemer als persoonlijke tutor werken de deelnemers op deze manier aan hun verdere wiskundige ontwikkeling.

Via verschillende selectiemomenten in de loop van het trainingsjaar worden de drie teams geselecteerd. Het niveau van de internationale wedstrijden ligt veel hoger dan dat van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Dankzij het intensieve trainingsprogramma slepen Nederlandse deelnemers toch geregeld medailles in de wacht.

Op het programma van de training staan onderwerpen zoals algebra, combinatoriek, getaltheorie en meetkunde. Voor een indruk van de volledige inhoud, zie de trainingswebsite. In elke trainingsdeelnemer investeert de organisatie ca. 100 uur aan persoonlijke begeleiding en daarnaast nog ca. 1000 euro aan accommodatiekosten.

Behalve een goede voorbereiding op de internationale olympiades, blijkt het trainingsprogramma de deelnemers ook een flinke voorsprong te geven op hun latere studie in een bètarichting.

1.4 FAQ

1.4.1 Hoe worden opgaven gemaakt?

Opgaven voor wiskunde olympiaden over de hele wereld worden vaak gemaakt door eerst een hele mooie oplossing te bedenken en dan een opgave eromheen te produceren terwijl je ervoor zorgt dat zo weinig mogelijk andere oplossingen te bedenken zijn dan die ene hele mooie. Zo heeft vrijwel elke opgave van elke wiskunde olympiade een hele mooie oplossing. Er is altijd een truc aanwezig, dat wanneer opgemerkt of toegepast, de opgave opeens erg gemakkelijk maakt.

1.4.2 Hoe worden opgaven geselecteerd?

Ik citeer hier uit een antwoord van Quintijn Puite, trainer van de IMO-team van Nederland: "Wij hebben een opgavencommissie voor deze wedstrijdrondes. Die bedenken alle opgaven en beoordelen ingestuurde opgaven. Alles wat er dit jaar niet gebruikt wordt, blijft "in portefeuille" voor een eventuele volgende editie. Het is dus niet zo dat we - zoals bij de IMO - een jaar later alle inzendingen voor een bepaalde wedstrijdronde vrijgeven. We gebruiken die opgaven namelijk het liefste alsnog een volgende keer!"

1.4.3 Hoe worden gemaakte toetsen nagekeken?

Puite: "Wat betreft het nakijken: wij maken voorafgaand aan een ronde altijd een uitgebreid nakijkmodel. Daarin staat precies voor welke stappen deelnemers punten krijgen. We baseren dat op alle bij aanvang bij ons bekende oplossingen (elke oplossing een ander schema). En als we dan tijdens het nakijken nog een andere aanpak tegenkomen, maken we daar ook weer een schema voor. Een deelnemer krijgt dan het hoogste aantal punten van de punten die hij volgens elk van die schema's zou halen (dit speelt een rol als mensen de opgave niet volledig oplossen maar wel verschillende aanpakken proberen). Overigens zijn er vaak duidelijke "vluchtheuvels": een deelresultaat waar je eigenlijk niet omheen kunt. Dat zie je ook terug bij de finale in bijvoorbeeld de versie van klas 4: daar wordt zo'n "vluchtheuvel" vaak een apart onderdeel van de opgave (bijvoorbeeld een congruentie van twee driehoeken). We zorgen er dan uiteraard voor dat zo'n resultaat in de verschillende nakijkschema's evenveel punten waard is."

1.4.4 Wat is nog algemeen advies om goed te scoren?

Puite: "Het is moeilijk om een algemene tip te geven om ver te scoren bij de olympiade. Maar de beste tip is toch wel vooral om heel veel te oefenen, dag in dag uit, om op die manier zoveel mogelijk ervaring op te doen. Niet oefenen met veel te moeilijke opgaven, maar met net ietsje te moeilijke opgaven. Zodat je telkens weer behoorlijk daarover moet nadenken, maar dat je er ook nog wel uit kan komen, soms pas na een week erover na te denken. Dat betekent dus ook: niet te snel naar de oplossing op zoek gaan, maar net zo lang doorgaan tot je een opgave zelf opgelost hebt en je je daarvan ook helemaal overtuigd hebt. Heel concreet betekent dat vaak: heel veel kleine gevallen doen, totdat je de opgave in de vingers krijgt en door hebt wat er eigenlijk gebeurt en waarom er bepaalde dingen gelden of waarom bepaalde dingen juist niet kunnen. Maar soms betekent het ook: de opgaven eens van een heel andere kant bekijken. Of tijdelijk een aanname doen waardoor je er misschien wel uitkomt. Of achteraan beginnen. Of nog eens een totaal ander plaatje tekenen. Et cetera."

1.4.5 Wat mag je gebruiken qua hulpmiddelen?

Je mag alleen pen, potlood, geodriehoek en passer gebruiken. Je mag geen rekenmachine of formulekaart gebruiken. Ik raad je aan om ook geen rekenmachine te gebruiken bij het doorlopen van dit werkstuk omdat je dan alvast oefent met hoofdrekenen of het berekenen van sommen op papier.

2 Hoe werkt dit werkstuk?

2.1 Indeling van Opgaven

Voor dit werkstuk heb ik ervoor gekozen om de opgaven in verschillende niveau's op te splitsen.

★ Op niveau met het VWO. Het toepassen van bekende formules en de moeite zit vooral in het weten van de formules en wanneer je ze moet gebruiken. Besteed maximaal 30 minuten gefocust werk aan deze opgaven.

★★ Vaak meerdere lastige inzichtstappen aan elkaar geketend. Besteed maximaal 1 uur gefocust werk aan deze opgaven.

★★★ Gebruik van inzicht om moeilijke ideeën te gebruiken en te articuleren. Nog meer lastige inzichtstappen aan elkaar geketend. Besteed maximaal 2 uur gefocust werk aan deze opgaven.

2.2 Stappenplan

(1) Maak een hoofdopgave voor de aangeraadde hoeveelheid tijd gebaseerd op de aantal sterren, maar als het jou niet lukt na al die tijd, lees de hint en werk nog 30 minuten aan de hoofdopgave.
Maar zorg ervoor dat je elke hoofdopgave serieus neemt, en niet tegen jezelf zegt dat je niet moet proberen omdat er toch achteraf nadat je de thema hebt gelezen deze opgave veel makkelijker zou zijn. Je zult bij het oefenen voor de Wiskunde Olympiade altijd denken dat je kennis over een bepaalde formule niet hebt bijvoorbeeld. En je zult meer van je fouten kunnen leren nadat je serieus over een opgave hebt gedaan. De serieuzer je het doet, misschien de meer pijn het zal doen wanneer je het niet begrijpt, maar de meer je ervan zult leren. Er zijn niet zoveel hoofdopgaven, zou je hebben gemerkt: dat komt omdat ik de opgaven van de Wiskunde Olympiade heb ingedeeld in een paar thema's, die zo breed toepasbaar mogelijk zijn. De hoofdopgaven zijn bijna allemaal drie sterren. Schrik er niet van! Ze zijn er om lang mee te stoeien!

(2) Bekijk de oplossing, maar weet dat de oplossing niet een uitwerking is.
Bij de oplossing wordt een opgave slechts gesplitst in kleinere opgaven. Doe deze kleinere opgaven als de opgave niet lukte: kijk of je na stap één te hebben gelezen het bewijs af kan maken, en als dat niet lukt, vervolgens naar de volgende stap te kijken totdat je een complete uitwerking hebt geschreven. Ik wilde hiermee jou leren om uitwerkingen nooit helemaal te lezen omdat je vaak daardoor niet de opgave zult begrijpen. Je moet van je fouten leren.

(3) Lees de bespreking van de hoofdopgave door.
Daar worden belangrijke punten, achterliggende thema's en heuristiek besproken die in die hoofdopgave benut zijn. Ik bespreek opgaven door op te schrijven waar ik allemaal aan denk wanneer ik bepaalde stappen zet. Er zijn lessen gestopt in de besprekingen! Lees ze dus voorzichtig en denk mee!

(4) Lees de thema van de hoofdopgave door.
Je krijgt bij de thema te horen over allerlei strategieën die een opgave met een bepaalde thema open kunnen kraken. We bekijken per strategie dan een voorbeeldopgave zodat je de strategie ook een keertje toegepast zult zien zodat je het beter begrijpt. Vaak kan de thema best vaag overkomen, maar daarom hoef je niet alles van de thema te begrijpen. De thema is hopelijk veel beter te begrijpen nadat je gestoeid hebt met een paar oefeningen. Ook belangrijk om te melden is dat je niet deze strategieën moet onthouden! Je moet ze niet in Quizlet zetten en kijken of je per thema de hele boel kunt onthouden. Dat werkt niet! Je moet opgaven gaan doen en achteraf kijken hoe een bepaalde thema hier tevoorschijn komt en welke strategie hier gebruikt werd.

(5) Maak de oefeningen bij de thema. Als het jou niet lukt, moet je de thema scannen en kijken welke besproken strategie je kunt toepassen. Als dat niet lukt, zou je dan die opgave het best kunnen bespreken met een docent of een vriend.
Sommige oefeningen van een thema zijn niet van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Vaak zijn die oefeningen alsnog handig om te maken omdat ze expres geselecteerd zijn om extra inzicht en context tot de thema te geven. Sommige oefeningen zijn op meerdere manieren te maken. Dat is helemaal prima, maar richt je erop om een bepaalde strategie van de bijbehorende thema toe te passen zodat je meer zult leren over de thema. Maar ga ook niet te ver omdat je niet jezelf moet laten insluiten door de strategieën. Denk vrij om de thema heen, maar als je niet uitkomt, ga de strategieën langs. Ik zeg het weer. De strategieën zijn niet om te onthouden. Ze functioneren als zijwieltjes. Je moet ze wel gebruiken als het nodig is, maar je kunt het best leren wanneer je ze eraf haalt: maar het betekent niet dat je dan begint zonder zijwieltjes.

(6) Herhaal stappen 1 t/m 5 totdat je alle hoofdopgaven hebt gemaakt.

(7) Maak een toets met een timer. Doe dit steeds totdat je alle toetsen hebt gemaakt.
De toetsen hoeven niet als toetsen gemaakt te worden. Zo'n toets kan je altijd samen doen, maar doe het alsnog met een timer om de samenwerking gefocust te houden. Kijk vervolgens de opgaven na door middel van de

uitwerkingen die online te vinden zijn op de Wiskunde Olympiade website, want toetsopgaven komen allemaal uit de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

2.3 Over het Lezen van Uitwerkingen

Soms kan het niet anders dan dat je de uitwerking moet opzoeken en vervolgens lezen bij een oefening, toets of zelfs bij een hoofdopgave. Ik raad je natuurlijk wel aan om opgaven met vrienden of op een forum te bespreken. Wiskunde is namelijk niet een vak dat je het best als kluizenaar op een bergtop onder de knie kunt krijgen. Paul Erdös, een van de belangrijkste wiskundigen uit de 20e eeuw, had meer dan 500 mensen waarmee hij had samengewerkt. Hij trok elke paar dagen van huis naar huis om met allerlei mensen samen te werken. Het is een vak dat je het best kunt leren door lastige opgaven met anderen te bespreken, want zo leer je andere perspectieven kennen en het is vooral ook leuk(er). Natuurlijk moet je wel dit met mate doen: niet ALLE opgaven samen doen. Alleen opgaven waar je echt niet uitkomt nadat je de aangeraadde hoeveel tijd (GEFOCUST) hebt gebruikt en alsnog niet een oplossing heb kunnen bedenken. Of natuurlijk opgaven die je wel kon maken, maar zo mooi waren dat je het aan anderen MOET laten zien.

Maar soms is een opgave bespreken gewoon niet praktisch. Dus ga je naar een uitwerking kijken. Dat geeft niet. Maar als je echt naar de uitwerking van die opgave moet kijken, zorg ervoor dat je het goed doet. Ten eerste, vraag jezelf: wat is de crux? Wat is de grootste moeilijkste meest-inzicht-benodigde stap? Vraag jezelf hoe je op die crux had kunnen komen. Zaten er sporen in de opgave die je tot die crux had kunnen leiden? Hoe kun je die sporen volgende keer herkennen? Misschien is het lastig voor jou om deze vragen te stellen en te beantwoorden. Maar daarom heb ik alle hoofdopgaven ook besproken! Lees die besprekingen dus en leer van hoe in die besprekingen een uitwerking wordt geanalyseerd.

2.4 Nog meer FAQ

2.4.1 Hoe lang moet je werken aan een opgave?

Er is een reden waarom we via de sterren geplakt vóór een opgave een bepaalde maximale tijdsduur hebben aangeraden. Je moet namelijk niet teveel oefenen, maar ook zeker niet te weinig. Je mag niet opgeven voor die maximale tijdsduur, je mag ook niet verder werken omdat je denkt de oplossing misschien toch te kunnen vinden door dezelfde ding te doen als wat je daarvoor had gedaan. Probeer een opgave meedogenloos, maar ga niet helemaal "burn-out" op een opgave. Laat die met rust voor een paar dagen voordat je opnieuw probeert. Je wilt niet "burn-out" gaan omdat je dan niet meer effectief je tijd gebruikt. Wanneer je een opgave niet rustig aanpakt en alles erop loslaat. Wanneer je alles doet om een opgave op te lossen, zul je vaak die opgave niet oplossen. Wiskunde Olympiade opgaven zijn ontworpen om op een hele slimme maar elegante manier opgelost te worden. Random dingen proberen zal niet werken! Je moet je verstand gebruiken. En te kort werken aan een opgave is ook slecht omdat je dan niet eens alle verstandige aanpakken geprobeerd zult hebben. Als je vraagt hoe lang je aan een opgave moet werken: probeer aan te voelen wanneer je eenmaal burn-out gaat op ideeën. Dan moet je stoppen. Dit is vaak makkelijk te herkennen wanneer je een stopwatch naast je hebt zodat je de tijd makkelijk in de gaten kunt houden.

2.4.2 Hoe word je goed in olympiade opgaven?

Weet je wat het geheim is van beter worden in de Wiskunde Olympiade? Erg simpel. Je moet opgaven waarderen. Je moet niet honderden opgaven doen en ze gewoon zien als oefeningen zoals je gewend bent op school. Elke opgave in de Wiskunde Olympiade moet je meer doen alsof je een gedicht leest: dat je ernaar kijkt op zoek naar een verstopte betekenis en de achterliggende gedachten, ideeën en strategieën waardeert! Waardeer echt de crux van de opgave. Waardeer de uitwerking, de kern van de ideeën van de uitwerking. Je moet het echt waarderen om het binnen te laten krijgen. En als je het niet waardeert, dan ben je niet diep genoeg gedoken in de uitwerking. Misschien vraag je dan: hoe kan ik wiskunde meer waarderen? Dan zeg ik: lees de geschiedwerken. De wiskunde is een opbouwsel van duizenden jaren van kennis. Pythagoras, Euclides, Archimedes, Euler, Gauss, Newton, Erdös. Al deze mensen hebben zeer veel waardering voor de wiskunde. Leer over hen. Ik raad de boeken van William Dunham aan, zoals Euler: The Master of Us All. Dunham geeft ook lezingen, waarvan een aantal op YouTube staan, zoals die over Euler (https://www.youtube.com/watch?v=fEWj93XjONO&ab_channel=PoincareDuality) en Newton (https://www.youtube.com/watch?v=qFo7xZFdBdc&ab_channel=NationalMuseumofMathematics). Een bekende boek dat veel mensen heeft geïnspireerd om zich te wenden tot de wiskunde, zoals onder andere bekende natuurkundige Freeman Dyson, is Men of Mathematics door E.T. Bell.

Nog een tip van mij is om te luisteren naar je brein. Nadat je veel hebt geoefend, is het zo dat je brein gewoon het antwoord aan je toelegd. Als je vraagt aan zeer goede wiskundigen hoe ze een bepaalde oplossing zagen,

zullen ze zeggen dat het gewoon voor hen voor de hand liggend was, terwijl het voor jou helemaal niet het geval was. Ga niet op artificiële wijze denken. Laat je brein het werk doen. Jouw taak is slechts om te zwijgen.

2.4.3 Waarom heb ik niet zoveel inzicht als anderen?

Ten eerste moet je ervan uit gaan dat je jezelf inzicht kunt aanleren! Ik wil niet dat je door dit werkstuk heen werkt met de gedachte dat je niet je inzicht kan laten groeien. Inzicht is aan te leren. Zelfs als biologen en psychologen anders zeggen, dat je IQ bijvoorbeeld erg afhankelijk is aan genetische constanten, is er geen beter mogelijkheid voor je dan om ervan uit te gaan dat je inzicht kunt leren.

Veel mensen aanschouwen anderen en vragen dan zichzelf af waarom zij zoveel inzicht hebben en zij niet. Deze zelfde gedachte spookte mij toen ik een video zag van de gefaamde MATHCOUNTS competitie in de VS: https://www.youtube.com/watch?v=dSnOLW_W6og&t=5s&ab_channel=MATHCOUNTSFoundation. Vragen die erg lastig lijken maar ook echt lastig zijn worden aan hen toegelegd, maar zij, zeker de finalisten, kunnen zo gemakkelijk en zo snel al die opgaven maken. Hoe? Hebben ze gewoon een zeer hoge IQ? Misschien heeft dat geholpen, maar het komt allemaal op één ding neer: oefenen. Leren van je fouten en om te oefenen. En om niet te oefenen als een Neural Network leert: zonder ziel. Je moet leren met bewondering voor het vak. En blijf oefenen. Er zijn maar zoveel mogelijke opgaven, zoveel mogelijke mooie oplossingen. Als je genoeg hebt geoefend zul je opeens tot de wereld een genie lijken omdat je al die oplossingen in één oogopslag zult hebben gezien, omdat je een soortgelijke opgave eerder hebt gedaan.

2.4.4 Is wiskunde nuttig?

Zie de lijst onopgeloste problemen op Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_mathematics
Veel plezier.

2.4.5 Hoe schrijf je een goede oplossing?

Een oplossing moet de opgave verduidelijken zodat wanneer iemand anders jouw oplossing leest, zij ook de opgave zullen kunnen oplossen. Dit is de hoofddoel van elke oplossing. Verwaarloos dus niet stappen die triviaal lijken maar eigenlijk niet triviaal zijn. Dat is in principe hoe je een goede oplossing schrijft.

Bij de Wiskunde Olympiade kan je een oplossing eigenlijk zien als een bewijs. Een bewijs dat het antwoord 10 moet zijn, of een bewijs dat een bepaalde opstelling onmogelijk is bijvoorbeeld. Misschien is het handig om te vragen: wat is een bewijs?

Een bewijs is een blokschema van stellingen verbonden met “dus” of “impliceert”. Dat is eigenlijk alles wat het is. Het is niet belangrijk om een blokschema te tekenen van je bewijs, maar het is wel handig om te weten dat dat eigenlijk de onderliggende structuur is van een bewijs. Want het vaakst bekijk je oplossingen op een stap-voor-stap schaal. Maar soms is het juist handiger om oplossingen ook als geheel te kunnen zien. Dat kan door de blokschema ongeveer in je hoofd te houden. Voor sommigen kan het erg helpen om die ook te tekenen wanneer die een uitwerking leest of zijn eigen oplossing analyseert.

Wat ik ook kwijt wil, is dat je bij het schrijven van een bewijs de stelling die je gebruikt tussen haakjes moet schrijven. Bijvoorbeeld, stel ik pas de stelling van Pythagoras toe:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dan mag ik dat niet zomaar schrijven. Ik moet ook schrijven waarom dat waar is. Ik moet dus schrijven:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Pythagoras)}$$

Ik moet dus naar de stelling van Pythagoras refereren. Dit is belangrijk om te weten, want als de lezer de stelling die je gebruikt niet weet, kan hij die dan opzoeken en kijken of wat je doet ook klopt of niet.

3 Heuristiek

Met heuristiek bedoelen we algemene strategieën die onafhankelijk van de soort opgave en onderwerp van opgave toegepast kunnen worden. Veel van deze kunnen zelfs buiten de wiskunde toepassing vinden.

3.1 Doelen

Bedenk wat de enerlaatste stap van de opgave kan zijn. Vraag jezelf: wat zou je moeten bewijzen voordat de gevraagde eruit komt. Je kunt zelfs verder gaan dan de enerlaatste stap. Je kunt dan ook vragen wat is de stap daarvoor, en die daarvoor, totdat je niet meer zoveel inzicht nodig hebt omdat het gat tussen waar jij bent qua argumentatie en waar je wilt zijn zo klein wordt. Laten we een voorbeeld bekijken.

Voorbeeld (Slovenië 1998). Een punt A ligt buiten een cirkel $\mathcal{K}$ met middelpunt O. Lijn AO snijdt de cirkel bij B en C, en een raaklijn door A raakt de cirkel in D. Laat E een willekeurig punt zijn op de lijn BD zodat D tussen B en E ligt. De omgeschreven cirkel van de driehoek DCE ontmoet lijn AO bij C en F en lijn AD bij D en G. Bewijs dat de lijnen BD en FG evenwijdig zijn.

Je hoeft niet deze opgave te begrijpen. Je hoeft niets uit te rekenen. Wat zou de enerlaatste stap kunnen zijn? Ze vragen jou om te bewijzen dat twee lijnen evenwijdig zijn. Kans is dat je daarvoor moet bewijzen dat twee F-hoeken of Z-hoeken gelijk zijn. Dat is de enerlaatste stap. Wat zou de stap daarvoor kunnen zijn? Misschien kun je bewijzen dat twee F-hoeken of Z-hoeken gelijk zijn door middel van gelijkvormigheid? Is er een paar driehoeken daarvoor aanwezig? Kunnen we de enerlaatste stap ook niet behalen door middel van hoekensommen en overstaande hoeken, allerlei hoeken te berekenen? Maar goed. Zie je hoe de opgave helemaal openklapt wannneer je een doel hebt? Je weet misschien nog steeds niet wat je helemaal moet doen, maar het is al miljoenen keer beter dan om geen doel te hebben bij een opgave. Want nu weet je ten minste waarnaar je moet zoeken!

3.2 Kleine Gevallen Proberen

Probeer zelf uit te rekenen, zeker toepasselijk op opgaven met reeksen, wat kleinere gevallen. Bijvoorbeeld wanneer $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Misschien onthul je daarbij een patroon die interessant is om naar te kijken. Zet je vindingen in een mooie tabel, want rommelige tabellen zijn nutteloos. En als je geen patroon ziet, doe de berekeningen opnieuw! Ook belangrijk om te weten, is dat je voor je gevoel een signifante hoeveelheid gevallen berekent. Want soms zou het kunnen lijken dat een bepaald patroon aanwezig is, maar als je verder gaat, blijkt het een ander patroon te zijn. Zie deze voorbeeld.

Voorbeeld. Stel je hebt een pad van $n \times 1$. En je hebt tegels van 2×1 en 1×1. Op hoeveel manieren kan je zo'n pad betegelen?

Laten we kijken naar kleine gevallen. Qua notatie, laten we zeggen dat P_n de aantal manieren is om een pad van $n \times 1$ te betegelen. Dus, $P_1 = 1$, want je kunt zo'n pad maar tegelen met een tegel van één bij één. $P_2 = 2$, want $(1,1)$ of (2). $P_3 = 3$, want $(1,1,1)$, $(2,1)$ en $(1,2)$. En $P_4 = 5$, want $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$ en $(2,2)$. En $P_5 = 8$, want $(1,1,1,1,1)$, $(2,1,1,1)$, $(1,2,1,1)$, $(1,1,2,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,1)$, $(2,1,2)$ en $(1,2,2)$. Laten we dit nu voor overzicht in een tabel zetten.

n	1	2	3	4	5
P_n	1	2	3	5	8

Dus, we hebben nu de rijtje $1, 2, 3, 5, 8$. Is deze rijtje bekend? Ja, het is de rij van Fibonacci! Kan jij bewijzen dat dit voor alle n zal gelden? Het is niet moeilijk, probeer het eens.

Merk op dat als we maar $n = 1, 2, 3$ hebben berekend en dachten dat we al een patroon te pakken hebben omdat het een lineaire functie lijkt te zijn, we fout zullen staan? Het gevolg daarvan zal duidelijk zijn het blijkt dat je niet kunt bewijzen dat $P_n = n$. Dan moet je maar nog meer P_n berekenen. "Back to the drawing board!"

3.3 Tekening maken

Teken een nette tekening! Natuurlijk is dit niet altijd toepasbaar, omdat sommige opgaven, zoals algebra opgaven, niet te tekenen zijn. Maar vaak is een tekening erg handig, want het structureert de gegevens op een manier dat begrijpbaar is. Maar dat kan alleen als je ook goed uitkiest hoe je zo'n tekening zal maken. Hoe kan je de gegevens op papier zetten zodat het allemaal daarin komt te staan en het zo leesbaar mogelijk wordt? Ga je de opstelling van de zijkant of van de bovenkant tekenen? Verder spreekt tekenen (denk ik) voor zich.

3.4 Alles Opschrijven

Wanneer je een vage idee hebt over hoe je een opgave zou kunnen oplossen, moet je proberen het echt goed te formuleren met woorden of een vergelijking. Houd de idee niet in je hersenen. Wanneer je een idee eenmaal op papier hebt, zul je zien dat je meer over dat idee zult ontdekken. Schrijven is niet alleen zodat anderen iets kan lezen, maar ook zodat jij het kan lezen. "Een idee is niet ontdekt totdat het op papier is gezet."

Ook bij het lezen van de opgave bouw je vaak ideeën op over allerlei mogelijke enerlaatste stappen of stappen daarvoor, of allerlei tussenstappen die misschien nodig zijn. Schrijf dit allemaal ergens op in steekwoorden zodat je later er terug op kan. Zo'n lijst van allerlei ideeën of stellingen die je wil overwegen te gebruiken kan erg handig zijn omdat je later dan die lijstje door kan gaan op ongeslagen paden.

3.5 Alle Informatie Gebruiken

Wanneer je vastloopt bij een opgave, kijk naar welke waarden of stukjes informatie uit de opgave nog niet gebruikt is. Als er in de opgave staat: "Zij $ABCD$ een vierkant." Heb je dan een bepaalde eigenschap van een vierkant gebruikt? Dat al zijn hoeken 90 graden zijn? Dat al zijn zijden van dezelfde lengte zijn? Dit is handig omdat het niet vaak voorkomt dat opgaven je informatie geeft zonder dat dat nodig of zeer handig kan zijn!

3.6 Analyseer de Gegeven Informatie

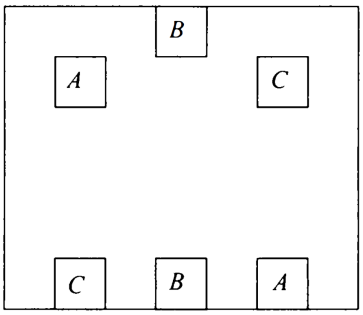
Door te kijken naar welke gegevens een opgave je geeft, kun je makkelijk achterhalen welke stellingen of technieken je zou kunnen toepassen. Als de opgave bijvoorbeeld veel hoeken en geen enkele zijdelengte of zijdeverhouding noemt, moet je niet kijken of je de Stelling van Pythagoras kunt toepassen!

Ik moet toegeven dat deze heuristiek en die daarvoor niet toepasbaar is op vraagstukken buiten de mooie opgaven van de Wiskunde Olympiade. In de echte wereld is er natuurlijk veel meer informatie beschikbaar dan nodig is. Maar goed. Het is alsnog handig voor jou om te weten als je voor de olympiade gaat.

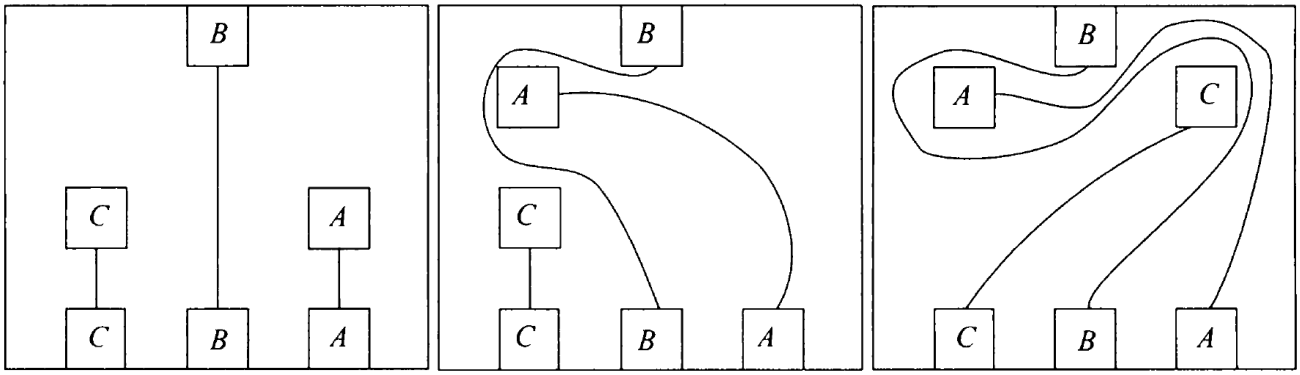
3.7 Polya-Methode

Wanneer je een moeilijke opgave tegemoetkomt, is het vaak mogelijk om een makkelijkere ervan te maken. Dit had Polya beschreven in zijn al te bekende boek: How to Solve It. De doel vooral is om die makkelijkere opgave op te lossen en om vervolgens een manier vinden om de oplossing van die makkelijkere opgave te generaliseren tot een oplossing voor de moeilijkere opgave. Als we met meetkunde werken met rare getallen zoals 1/3 en 7/3, zou het misschien het waard zijn om te kijken naar een diagram dat drie keer zo groot is zodat je slechts gehele getallen zult hebben. Of als je iets moet bewijzen dat in elke gelijkzijdige driehoek het geval is, eerst kan beginnen door te bewijzen dat het in een gelijkzijdige driehoek met lengte 1 geldt. Houd het simpel. Vaak kan je een opgave versimpelen door een wat specifieker geval van de opgave te bekijken. Want vaak willen opgaven dat je iets bewijst voor in het algemeen, maar ga jij maar eerst die stelling bewijzen voor een geval waar $n = 1$ bijvoorbeeld. Dan zou je met technieken zoals inductie of algebra jouw specifieke geval kunnen generaliseren.

Voorbeeld (The Art and Craft of Problem Solving). Verbind de dozen van dezelfde letter met elkaar met lijnen zonder dat de lijnen buiten het diagram komen of elkaar snijden.



De oplossing... zie je hoe de Polya-Methode is toegepast?



3.8 Invariantie

Je moet altijd op zoek gaan naar invariantie. Wat verandert er niet bij een bepaalde proces? Invariantie zorgt ervoor dat je in de oneindige zee van mogelijkheden toch grip kan hebben. Om invariantie te vinden kun je kijken naar wat je kunt veranderen aan de opgave zonder het antwoord te veranderen. Oppervlaktes veranderen bijvoorbeeld niet als de figuur van plaats verandert. Door invariantie hopen we om de opgave makkelijker te maken.

Voorbeeld. De getallen 1 t/m 20 staan op een krijtbord. Je mag per beurt twee getallen uitwissen a en b en vervolgens een nieuwe getal $ab+a+b$ opschrijven. Je score wordt bepaald uit de laatste getal die overblijft. Wat is de hoogst mogelijke score?

Het ziet eruit alsof er zoveel mogelijke manieren zijn dat een potje af kan lopen en dus ook erg veel mogelijke scores zijn, maar het is een strikvraag: er is maar één score mogelijk! Stel dat er nog n getallen over zijn, namelijk $x_1, x_2, ..., x_n$. Bekijk het getal $P = (x_1 + 1)(x_2 + 1)...(x_n + 1)$. We kiezen twee getallen, stel dat zijn x_1 en x_2. We vervangen dan in P de getallen x_1 en x_2 met $x_1x_2 + x_1 + x_2$. We krijgen dan in plaats van een factor $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ een factor $(x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1)$ bij het berekenen van P, maar deze twee factoren zijn hetzelfde! Dus, P blijft altijd gelijk! Dus, de enige score die mogelijk is en dus tevens de hoogste verkrijgbar is: $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1)...(20 + 1) = 21!$.

Invariantie is zo handig dat het zelfs toepasbaar is op IMO niveau, kijk bijvoorbeeld deze video door de bekende 3Blue1Brown: https://www.youtube.com/watch?v=M64HUIJFTZM&ab_channel=3Blue1Brown

4 Notatie

- NWO := Nederlandse Wiskunde Olympiade
- BMO := British Mathematical Olympiad
- IMO := International Mathematical Olympiad
- NMTC := National Mathematics Talent Contest
- CSMO := Czech and Slovak Mathematical Olympiad
- UNMO := Ukraine National Mathematical Olympiad
- $A \implies B$:= A impliceert/dus B
- $A \iff B$:= als en alleen als A waar is, dan is B waar. (Het gaat dan twee kanten op als het ware.)

5 Meetkunde

"Meetkunde is de kunst van correct redeneren vanuit verkeerd getekende figuren." - Henri Poincaré

Welkom bij Meetkunde!

5.1 Voorkennis

We raden je aan om de stellingen die je niet begrijpt helemaal te bewijzen en die bewijs ook helemaal NETJES op te schrijven zodat het ook NETJES in je hersenen terecht zal komen.

We beginnen de voorkennis zoals Euclides ook zijn Elementen begon...

DEFINITIES

1. een punt is een object zonder dimensie.
2. een lijn is een lengte zonder breedte.
3. een lijnstuk is een lijn met een eindige lengte.
4. een boog is een niet rechte lijn.
5. drie lijnen zijn concurrent als ze één snijpunt hebben.
6. drie punten zijn collineair als één lijn door die drie punten gaan.
7. een gestrekte hoek is een hoek van 180°.
8. een volledige hoek is een hoek van 360°.
9. een rechte hoek is een hoek van 90°.
10. een cirkel is de verzameling punten op gelijke afstand (radius) van een vaste punt (middelpunt).
11. een koord van een cirkel is een lijnstuk waarvan allebei zijn eindpunten op de cirkel liggen.
12. een omtrekshoek is een hoek waarvan de hoekpunt op de cirkel ligt.
13. een middelpuntshoek is een hoek waarvan de hoekpunt op de middelpunt van een cirkel ligt.
14. een driehoek is een figuur ingesloten door drie rechte lijnen.
15. een ceviaan is een lijn door de hoekpunt van een driehoek en een punt in de overstaande zijde.
16. de omgeschreven cirkel van een driehoek is één cirkel die door alle punten heen gaan van een driehoek.
17. de ingeschreven cirkel van een driehoek is een cirkel binnen de driehoek die alle drie de zijden vanbinnen raakt.
18. een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke hoeken en twee gelijke zijden.
19. een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke hoeken en drie gelijke zijden.
20. een rechthoekige driehoek heeft een rechte hoek. Zie je waarom er niet meer dan één rechte hoek kan zijn in een driehoek?
21. een vierhoek is een figuur ingesloten door vier rechte lijnen.
22. een koordenvierhoek is een vierhoek waarvan al zijn punten op één cirkel liggen.
23. de eenheidscirkel is de cirkel met radius 1 en middelpunt $(0, 0)$.
24. de sinus van α is de y-coördinaat van een punt op $(1, 0)$ die gedraaid is om de middelpunt $(0, 0)$ met α graden.
25. de cosinus van α is de x-coördinaat van een punt op $(1, 0)$ die gedraaid is om de middelpunt $(0, 0)$ met α graden.
26. de tangens van α is $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
27. synthetische meetkunde betekent meetkunde zonder gebruik van algebraïsche dingen zoals assenstelsels en functies.
28. algebraïsche/analytische meetkunde betekent meetkunde waar wél gebruik wordt gemaakt van algebraïsche dingen.

NOTATIE

1. AB is de lijnstuk van A tot B.
2. $\overline{AB}$ is de lijn door punten A én B.
3. $\widehat{AB}$ is de boog door punten A en B.
4. $|AB|$ is de lengte van lijnstuk AB.
5. $AB \perp PQ$ betekent dat AB loodrecht staat op PQ.
6. $O(X)$ betekent de oppervlakte van de figuur X.
7. $\angle ABC$ betekent de hoek met benen AB en BC en dus hoekpunt B.

STELLINGEN

Lijnen

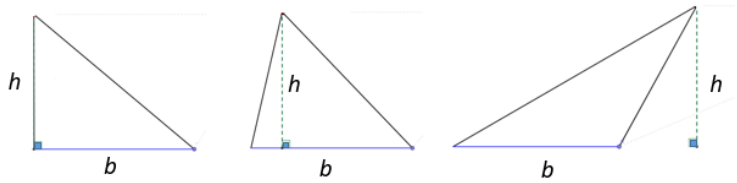
1. overstaande hoeken zijn gelijk bij een paar snijdende lijnen.
2. twee lijnen zijn parallel $\Longleftrightarrow$ F-hoeken en Z-hoeken zijn gelijk.

Cirkels

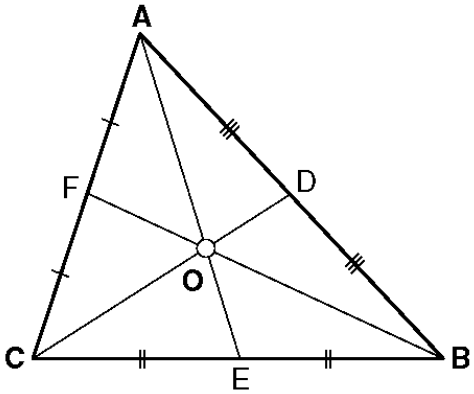
3. de oppervlakte van een cirkel is $\pi \cdot r^2$ waar r de radius is van die cirkel.
4 (Stelling van Thales). zij middellijn AB van een cirkel en punt C op die cirkel. Dan is $\angle ACB = 90°$ waar je ook punt C plaatst op de cirkel. Andersom werkt dit ook: als $\angle ACB = 90°$ is, zal AB een middellijn zijn van een cirkel met ook punt C erop.
5. van een raaklijn op een cirkel weten we dat de loodlijn door de raakpunt door de middelpunt van de cirkel gaat.
13. de middelloodlijn van een koord gaat door de middelpunt van de cirkel heen.
6 (Constante Hoek). kies drie punten A, B en C op een cirkel. Dan is $\angle ABC$ constant voor waar B ook is, maar alleen als A en C op dezelfde plek blijven.
7 (Omtrekshoek). zij een cirkel met middelpunt M en punten A, B en C op de cirkel. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AMC$.

Driehoeken

7. de hoekensom van een driehoek is 180°.
8. twee driehoeken zijn gelijkvormig als er minstens één van de volgende geldt: zzz, zhz, zzr of hh. Als $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, geldt er dat $\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|PR|} = \frac{|BC|}{|QR|}$ en $\angle ABC = \angle PQR$ en $\angle BCA = \angle QRP$ en $\angle CAB = \angle RPQ$. (Bij het schrijven van $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, let op de volgorde van de letters; gelijke hoeken moeten met elkaar corresponderen.)
9. twee driehoeken zijn congruent als er minstens één van de volgende geldt: ZZZ, ZHZ, HZH, ZZZ of ZZR. Congruente driehoeken gedragen als gelijkvormige driehoeken maar de corresponderende zijden zijn gelijk. (Dus eigenlijk gelijkvormigheid met schaal 1.)
10. de oppervlakte van een driehoek kan je berekenen met de volgende formule: $O(\Delta) = \frac{1}{2} \cdot base \cdot hoogte$. (Zie figuur voor voorbeelden.) Deze formule kun je ook gebruiken om de oppervlakte van n-hoekige figuren te berekenen door ze te verdelen in driehoeken.

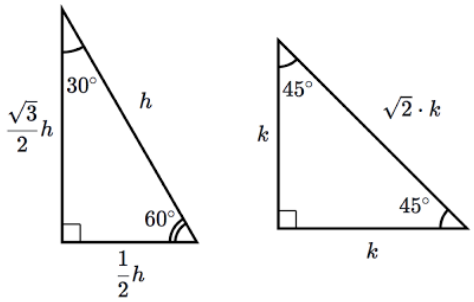


11. de zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in de zwaartepunt van de driehoek. Zie figuur. Er geldt dan dat $\frac{|BO|}{|OF|} = \frac{|AO|}{|OE|} = \frac{|CO|}{|OD|} = 2$.



12. alle hoogtelijnen van een driehoek snijden in één punt, en dat punt is de orthocentrum.
14. elke driehoek heeft een omgeschreven cirkel.
15. alle middelloodlijnen van een driehoek snijden in één punt, en dat punt is de middelpunt van de omgeschreven cirkel.
16. elke driehoek heeft een ingeschreven cirkel.
17. alle bissectrices van een driehoek snijden in één punt, en dat punt is de middelpunt van de ingeschreven cirkel.
18. de bissectrice van de tophoek van een gelijkbenige driehoek is ook de middelloodlijn van de overstaande zijde.
19. de bissectrice, middelloodlijnen, zwaartelijnen en hoogtelijnen van elk punt van een gelijkzijdige driehoek vallen samen.
20 (Stelling van Pythagoras). Bij een rechthoekige driehoek ABC met $\angle ABC = 90°$, is $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$.

Dit geldt ook omgekeerd. Als $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, is $\angle ABC = 90°$.
21 (Stelling van Koorde en Raaklijn). de hoek tussen een koorde AB en de raaklijn in A is gelijk aan de omtrekshoek ACB van die koorde. Zie deze applet: http://www.vandeveen.nl/Wiskunde/Meetkunde/Stelling%20van%20koorde_en_raaklijn.html
24. Er zijn speciale driehoeken die heel belangrijk zijn om te weten omdat die hoeken en verhoudingen vaak voorkomen. Links is de 30-60-90-driehoek. Rechts is de geodriehoek of 45-90-45-driehoek.



Vierhoeken

21. de hoekensom van een vierhoek is 360°.
22. de oppervlakte van enkele vierhoeken moet je weten:

- rechthoek: $a \cdot b$
- vierkant: a^2
- trapezium: $\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$
- parallelogram: $b \cdot h$
- ruit: $\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

23. punten $ABCD$ liggen op één cirkel $\iff \angle ABC + \angle CDA = 180°$. (Je mag ook zeggen dat $ABCD$ een koordenvierhoek is.)

Trigonometrie

25. SOS/CAS/TOA. (oftewel: sinus, cosinus en tangens functies gebruiken om verhoudingen in een rechthoekige driehoek te berekenen.)

26 (Cosinusregel). bij een driehoek met zijden a, b en c, geldt er: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle C)$ waarbij $\angle C$ de hoek overstaand aan zijde c is. Dit is eigenlijk stiekem een algemenere vorm van de Stelling van Pythagoras!
27 (Sinusregel). bij een driehoek ΔABC met zijden a (overstaand aan $\angle A$), b (overstaand aan $\angle B$) en c (overstaand aan $\angle C$), geldt er: $\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$. Leuk feitje is dat al die breuken gelijk zijn aan de diameter van de omgeschreven cirkel van ΔABC.

28. som- en verschilformules:
$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$
$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$
$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$

29. verdubbelingsformules:
$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

5.2 Kort over GeoGebra

GeoGebra is gratis software voor het tekenen van meetkunde diagrammen. Als je er nog nooit over gehoord hebt, kun je het hier proberen: https://www.geogebra.org/calculator

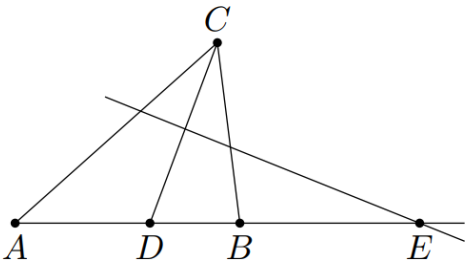
Ik raad je het aan om GeoGebra alleen te gebruiken wanneer een opgave te lastig is. Ik weet dat veel mensen GeoGebra standaard gebruiken bij meetkunde opgaven, maar met passer, liniaal en potlood werken is nog steeds wel wat je uiteindelijk snel en foutloos moet kunnen doen bij een olympiade toets. Dus, hoe langzaam het ook is, doe dat!

In dit werkstuk zullen er eventueel bij besprekingen of hints GeoGebra's uitgedeeld worden. Wat ik wil dat jij weet is dat deze GeoGebra's een kleurcodering volgt. Voorwerpen die jij als gebruiker kunt bewegen door ze te slepen bijvoorbeeld zijn in het groen. Erbijgetekende constructies zoals hulplijnen zijn in het blauw. En belangrijke voorwerpen zijn in het rood. De rest is in het zwart.

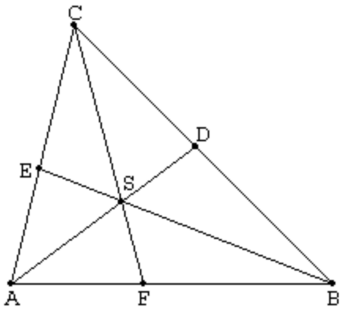
5.3 Opgaven

5.3.1 Hoofdopgaven

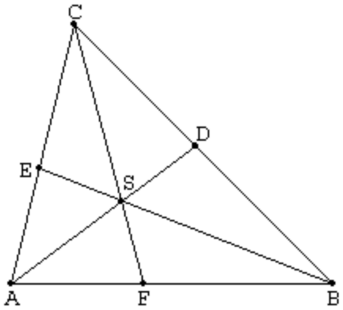
★★★**Opgave M1 (Finale 2022).** In de driehoek ABC ligt het punt D op lijnstuk AB zo dat CD de bissectrice is van hoek C. De middelloodlijn van lijnstuk CD snijdt het verlengde van AB in E. Veronderstel dat $|BE| = 4$ en $|AB| = 5$.
(a) Bewijs dat $\angle BAC = \angle BCE$.
(b) Bewijs dat $2|AD| = |ED|$.
Hint, Bespreking



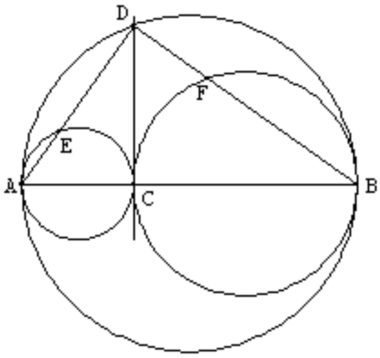
★★★**Opgave M2 (Tweede Ronde 1997).** Binnen een driehoek ABC snijden de lijnen AD, BE en CF elkaar in S. Gegeven is dat $|AS| : |DS| = 3 : 2$ en $|BS| : |ES| = 4 : 3$.
Bepaal de verhouding $|CS| : |FS|$. *Eis: gebruik oppervlaktes.*
Hint, Bespreking

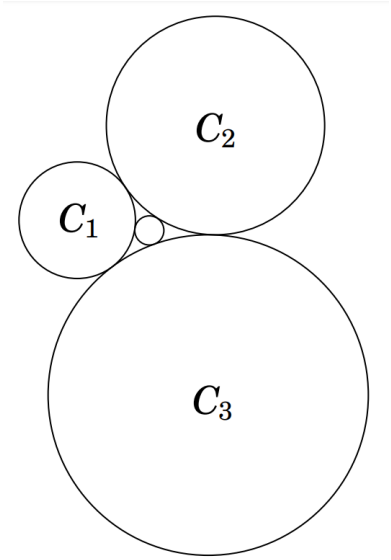


★★★**Opgave M3 (Tweede Ronde 1997).** Binnen een driehoek ABC snijden de lijnen AD, BE en CF elkaar in S. Gegeven is dat $|AS| : |DS| = 3 : 2$ en $|BS| : |ES| = 4 : 3$.
Bepaal de verhouding $|CS| : |FS|$. *Eis: oppervlaktes verboden.*
Hint, Bespreking



★★★**Opgave M4 (Tweede Ronde 1996).** Een lijn l snijdt het lijnstuk AB loodrecht in C. Drie cirkels zijn getekend met achtereenvolgens AB, AC en BC als middellijn. De grootste cirkel snijdt l in D. De lijnstukken DA en DB snijden de twee kleinere cirkels nog in E en F.
(a) Bewijs dat vierhoek $CFDE$ een rechthoek is.
(b) Bewijs dat de lijn door E en F de cirkels met middellijnen AC en BC raakt in E en F.
Hint, Bespreking

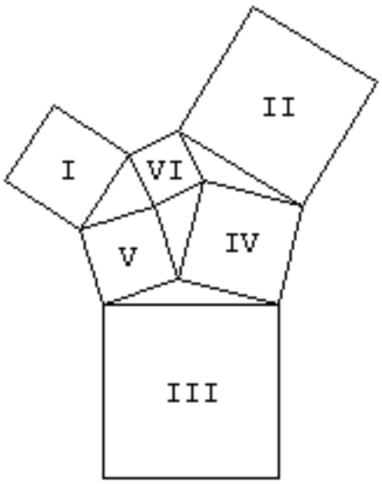




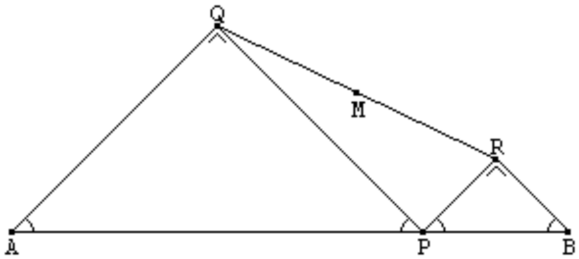
★★★**Opgave M5 (Tweede Ronde 2008).** Drie cirkels C_1, C_2, C_3 met stralen van lengte respectievelijk 1, 2 en 3 raken elkaar uitwendig. In het ingesloten gebied ligt een cirkeltje C_4 dat elk van de drie gegeven cirkels uitwendig raakt.
Bereken de lengte van de straal van C_4.
Hint, Bespreking

★★★**Opgave M6 (Tweede Ronde 1997).** Gegeven is een driehoek ABC en een punt K binnen de driehoek. Het punt K wordt gespiegeld in de zijden van de driehoek: P, Q en R zijn de gespiegelden van K in respectievelijk AB, BC en CA. M is het middelpunt van de cirkel door de hoekpunten van driehoek PQR. M wordt weer gespiegeld in de zijden van driehoek ABC: P', Q' en R' zijn de gespiegelden van M in respectievelijk AB, BC en CA.
(a) Bewijs dat K het middelpunt van de cirkel door de hoekpunten van driehoek $P'Q'R'$ is.
(b) Waar moet je K kiezen binnen driehoek ABC zodat M en K samenvallen? Bewijs je antwoord.
Hint, Bespreking

★★★**Opgave M7 (Tweede Ronde 1989).** Gegeven is een regelmatige n-zijdige piramide met top T en grondvlak $A_1A_2A_3...A_n$. De lijn loodrecht op het grondvlak door een punt B van het grondvlak binnen $A_1A_2A_3...A_n$ snijdt het vlak TA_1A_2 in C_1, het vlak TA_2A_3 in C_2, enzovoorts, en ten slotte het vlak TA_nA_1 in C_n.
Bewijs dat $BC_1 + BC_2 + ... + BC_n$ onafhankelijk is van de keuze van B.
Hint, Bespreking



★★★**Opgave M8 (Tweede Ronde 1992).** Zes vierkanten liggen met de hoekpunten tegen elkaar, daarbij driehoeken insluitend, zie de tekening. Bewijs dat de totale oppervlakte van de buitenste vierkanten (I, II en III) gelijk is aan driemaal de totale oppervlakte van de drie binnenste vierkanten (IV, V en VI).
Hint, Bespreking

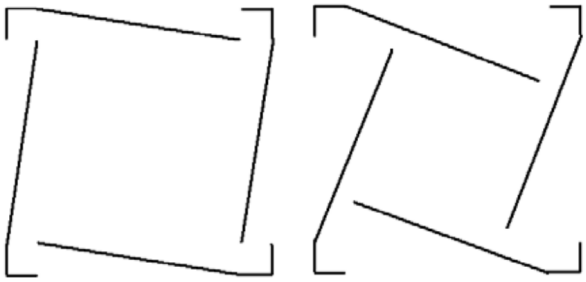


★★**Opgave M9 (Tweede Ronde 1995).** Op een lijnstuk AB wordt een punt P gekozen. Op AP en PB worden gelijkbenige rechthoekige driehoeken (geodriehoeken) AQP en PRB geconstrueerd met Q en R aan dezelfde zijde van AB. M is het midden van QR.
Bepaal de verzameling van de punten M als P het lijnstuk AB doorloopt.
Hint, Bespreking

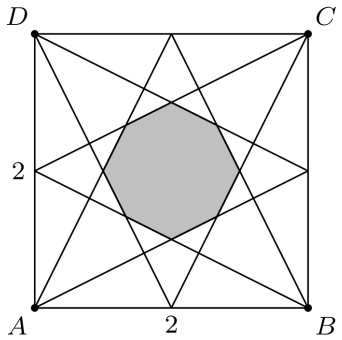
5.3.2 Toets 1 (4 uur)

★★**Opgave T1.1 (Finale 2009).** Gegeven is een willekeurige driehoek ABC. Op de middelloodlijn van AB ligt een punt P, binnen driehoek ABC. Op zijden BC en CA worden uitwendig driehoeken BQC en CRA gezet zodanig, dat $\Delta BPA \sim \Delta BQC \sim \Delta CRA$. (Dus Q en A liggen aan weerszijden van BC, en R en B liggen aan weerszijden van AC.)
Bewijs dat de punten P, Q, C en R een parallellogram vormen.

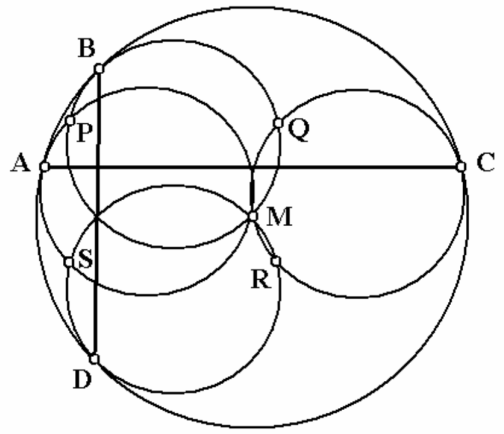
★★**Opgave T1.2 (Eerste Ronde 2002).** Een vierkant hok van 90 bij 90 cm heeft in elke wand in het midden een deur van 70 cm breed. De vier deuren worden naar binnen open gedraaid, beginnend op eenzelfde moment en met dezelfde snelheid. Op een bepaald moment kunnen ze niet verder draaien en sluiten dan een vierkant in (zie de figuur met twee bovenaanzichten van tussenstanden). Bereken de oppervlakte van het ingesloten vierkant.



★★★**Opgave T1.3 (Tweede Ronde 2019).** In een vierkant $ABCD$ met zijdelengte 2 trekken we vanuit elk hoekpunt een lijn naar het midden van elk van de twee overstaande zijden. Zo verbinden we bijvoorbeeld A met het midden van BC en met het midden van CD. De acht lijnen die we zo krijgen begrenzen samen een achthoek binnen het vierkant (zie de figuur).
Wat is de oppervlakte van deze achthoek?

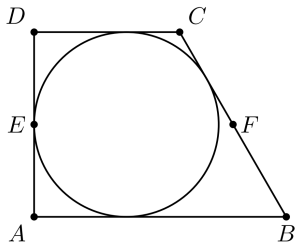


★★★**Opgave T1.4 (Tweede Ronde 2003).** In een cirkel met middelpunt M snijden twee koorden AC en BD elkaar loodrecht.
De cirkel met middellijn AM snijdt de cirkel met middellijn BM behalve in M ook nog in punt P.
De cirkel met middellijn BM snijdt de cirkel met middellijn CM behalve in M ook nog in punt Q.
De cirkel met middellijn CM snijdt de cirkel met middellijn DM behalve in M ook nog in punt R.
De cirkel met middellijn DM snijdt de cirkel met middellijn AM behalve in M ook nog in punt S.
Bewijs dat vierhoek $PQRS$ een rechthoek is.

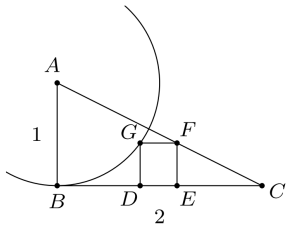


★★★**Opgave T1.5 (Tweede Ronde 1972).** $ABCD$ is een regelmatig viervlak. De punten P, Q, R en S liggen buiten dit viervlak en wel zó, dat $ABCP$, $ABDQ$, $ACDR$ en $BCDS$ regelmatige viervlakken zijn.
Bewijs dat de inhoud van het viervlak $PQRS$ kleiner is dan de som van de inhouden van $ABCP$, $ABDQ$, $ACDR$, $BCDS$ en $ABCD$.

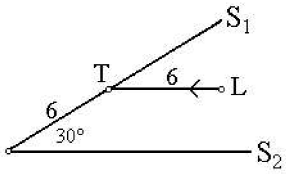
5.3.3 Toets 2 (3 uur)



★★**Opgave T2.1 (Eerste Ronde 2019).** Vierhoek $ABCD$ heeft rechte hoeken bij A en D. In de vierhoek past precies een cirkel met straal 10, die aan alle zijden van de vierhoek raakt. Zijde BC heeft lengte 24. Punt E is het midden van AD en punt F is het midden van BC.
Wat is de lengte van EF?

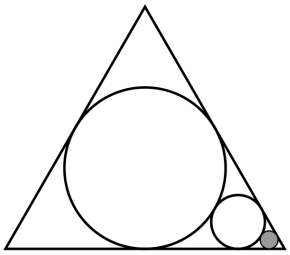


★★**Opgave T2.2 (Tweede Ronde 2016).** Driehoek ABC heeft een rechte hoek bij B. Verder heeft AB lengte 1 en heeft BC lengte 2. Op zijde BC liggen punten D en E zo dat E tussen C en D ligt en $DEFG$ een vierkant is, waarbij F op AC ligt en G op de cirkel met middelpunt A door het punt B.
Bereken de lengte van DE.



★★**Opgave T2.3 (Eerste Ronde 2004).** Twee spiegels S_1 en S_2 maken een hoek van 30° met elkaar. Vanuit een lichtbron L vertrekt een lichtsignaal evenwijdig aan een van de spiegels naar de andere spiegel. Het lichtsignaal treft de andere spiegel in het punt T. De afstanden van T tot de lichtbron en van T tot de snijlijn van de spiegels zijn beide gelijk aan 6. Na een aantal reflecties komt het lichtsignaal weer door het punt L.
Welke afstand legt het lichtsignaal af vanaf zijn vertrek uit L tot het moment dat het weer terug is in L?

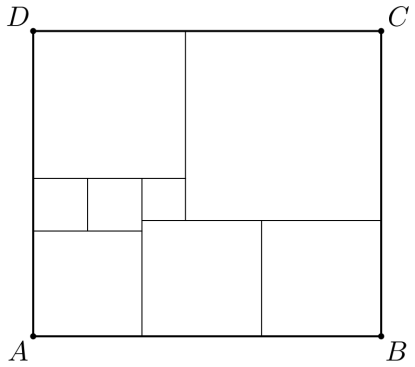
★★**Opgave T2.4 (Tweede Ronde 2015).** Van een vierhoek $ABCD$ zijn de hoeken bij A en B recht. Verder geldt dat $|AB| = 5$ en $|AD| = |CD| = 6$.
Bepaal alle mogelijke waarden van $|BC|$.



★★★**Opgave T2.5 (Eerste Ronde 2019).** In een gelijkzijdige driehoek is een cirkel getekend die raakt aan de drie zijden van de driehoek. De straal van die cirkel is gelijk aan 10. Een tweede, kleinere, cirkel raakt aan de eerste cirkel en aan twee zijden van de driehoek. Een derde, nog kleinere, cirkel raakt aan de tweede cirkel en aan twee zijden van de driehoek (zie de figuur). Wat is de straal van de derde cirkel?

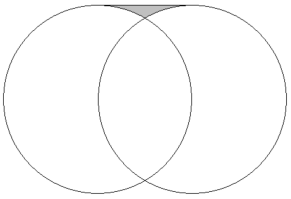
5.3.4 Toets 3 (3,5 uur)

★**Opgave T3.1 (Eerste Ronde 2017).** Rechthoek $ABCD$ is verdeeld in vierkantjes. Zijde AB heeft lengte 16.



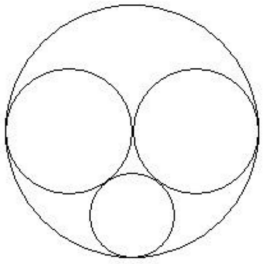
Hoe lang is zijde AD?

★★**Opgave T3.2 (Eerste Ronde 2001).** In de figuur staan twee cirkels met straal 6 getekend. De middelpunten van de cirkels liggen ook op een afstand 6 van elkaar. Bepaal de oppervlakte van het gearceerde gebied, dat begrensd wordt door twee cirkelbogen en een gemeenschappelijke raaklijn.



★★**Opgave T3.3 (Tweede Ronde 2004).** Twee cirkels C_1 en C_2 raken elkaar uitwendig in een punt P. Op C_1 ligt een punt Q zodanig dat de raaklijn in Q aan C_1 de cirkel C_2 snijdt in de punten A en B. De lijn QP snijdt C_2 nog in punt C.
Bewijs dat driehoek ABC gelijkbenig is.

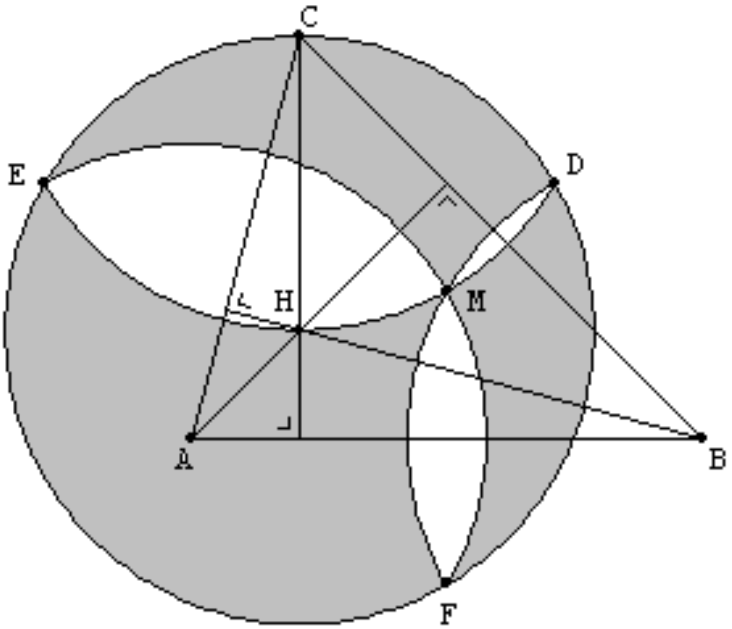
★★**Opgave T3.4 (Eerste Ronde 2003).** Binnen een cirkel met straal 2 bevinden zich twee even grote cirkels met straal 1 die elkaar uitwendig raken en de grote cirkel inwendig raken. Buiten de twee kleine cirkels en binnen de grote cirkel bevindt zich een kleinere cirkel die de andere drie cirkels raakt.
Bereken de straal van die kleinste cirkel.



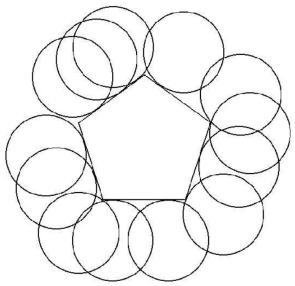
★★★**Opgave T3.5 (Eerste Ronde 2002).** In een kubus met ribbe 6 is een bol met diameter 6. De bol raakt dus inwendig aan de zes zijvlakken van de kubus. We denken de kubus opgedeeld in 216 eenheidskubusjes van $1 \times 1 \times 1$. Hoeveel kubusjes liggen er geheel binnen de bol? Een kubusje met een hoekpunt op het boloppervlak en verder binnen de bol tellen we mee als geheel binnen de bol liggend.

z.o.z.

★★★**Opgave T3.6 (Tweede Ronde 1991).**
Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met hoogtepunt H.
M is het middelpunt en R de lengte van de straal van de omgeschreven cirkel; notatie cirkel(M,R).
Cirkel(A,R) en cirkel(B,R) snijden elkaar in de punten M en F,
cirkel(A,R) en cirkel(C,R) snijden elkaar in de punten M en E,
cirkel(B,R) en cirkel(C,R) snijden elkaar in de punten M en D.
(a) Bewijs dat de punten D, E en F liggen op cirkel(H,R).
(b) Bewijs dat de oppervlakte van het gebied dat bestaat uit cirkel(H,R) zonder de drie gebieden die gevormd worden door de bogen MD, ME en MF (zie het gearceerde deel in de figuur) gelijk is aan tweemaal de oppervlakte van ABC.



5.3.5 Toets 4 (4 uur)



★★**Opgave T4.1 (Eerste Ronde 2005).** Een cirkel met straal 2 rolt rond een regelmatige vijfhoek met zijde 4. Daarbij blijft de cirkel tegen de vijfhoek gedrukt tot hij weer in zijn uitgangspositie is aangeland.
Bereken de oppervlakte van het gebied dat tijdens deze omwenteling door de cirkel bestreken wordt.

★★**Opgave T4.2 (Tweede Ronde 2022).** In een driehoek ABC is hoek A een rechte hoek. Op lijnstuk AB ligt een punt D zo dat de hoeken ACD en BCD even groot zijn. Er geldt $|AD| = 2$ en $|BD| = 3$.
Wat is de lengte van lijnstuk CD?

★★**Opgave T4.3 (Tweede Ronde 2010).** Bekijk een cirkel met middellijn AB. Punt C ligt op het lijnstuk AB zodanig dat $2 \cdot |AC| = |BC|$. De punten D en E liggen op de cirkel zodat CD loodrecht op AB staat en DE ook een middellijn van de cirkel is. Bepaal de waarde van $\frac{O(ABD)}{O(CDE)}$.

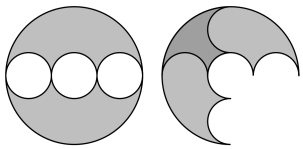
★★**Opgave T4.4 (Tweede Ronde 2010).** Op lijnstuk AB met lengte 10 ligt punt C zodat $|AC| = 6$ en $|CB| = 4$. Twee punten X en Y liggen aan dezelfde kant van lijn AB, zodat $|YB| = |YC| = 3$, $|XA| = 8$ en $|XC| = 6$. Bepaal de lengte van lijnstuk XY.

★★**Opgave T4.5 (Tweede Ronde 1998).** Gegeven is een convexe* vierhoek $ABCD$ waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan. **Convex betekent: alle hoeken zijn kleiner dan* 180°.
(a) Bewijs: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.
(b) Als $PQRS$ een convexe vierhoek is met $PQ = AB$, $QR = BC$, $RS = CD$, $SP = DA$ dan staan de diagonalen loodrecht op elkaar. Bewijs dit.

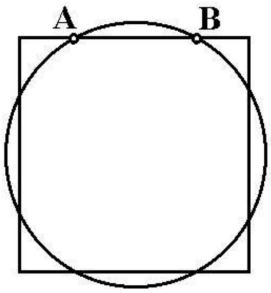
★★★**Opgave T4.6 (Tweede Ronde 2006).** Gegeven is driehoek ABC met een ingeschreven cirkel met middelpunt M en straal r. De raaklijn aan deze cirkel die evenwijdig is met BC snijdt AC in D en AB in E. De raaklijn aan deze cirkel die evenwijdig is met AC snijdt AB in F en BC in G. De raaklijn aan deze cirkel die evenwijdig is met AB snijdt BC in H en AC in K. Noem de middelpunten van de ingeschreven cirkels van driehoek AED, driehoek FBG en driehoek KHC achtereenvolgens M_A, M_B, M_C en de stralen achtereenvolgens r_A, r_B en r_C.
Bewijs: $r_A + r_B + r_C = r$.

5.3.6 Toets 5 (3 uur)

★**Opgave T5.1 (Eerste Ronde 2019).** Uit een cirkelschijf met straal 3 knippen we drie cirkeltjes met straal 1 zoals in de figuur links. Hierdoor valt de cirkelschijf in twee stukken uit elkaar. Het onderste stuk draaien we een kwartslag en leggen we op het bovenste stuk zoals in de figuur rechts. Het gedeelte waar de twee stukken overlappen is wat donkerder gekleurd.
Wat is de totale oppervlakte van deze rechter figuur (dus het licht- en donkergrijze deel samen)?



★**Opgave T5.2 (Eerste Ronde 2004).** Het middelpunt van een cirkel met straal 1 valt samen met het snijpunt van de diagonalen van een vierkant. De cirkel en het vierkant hebben dezelfde oppervlakte. De cirkel snijdt een zijde van het vierkant in de punten A en B.
Hoe lang is het lijnstuk AB?

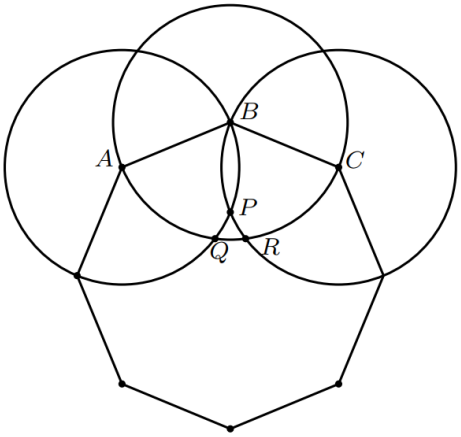


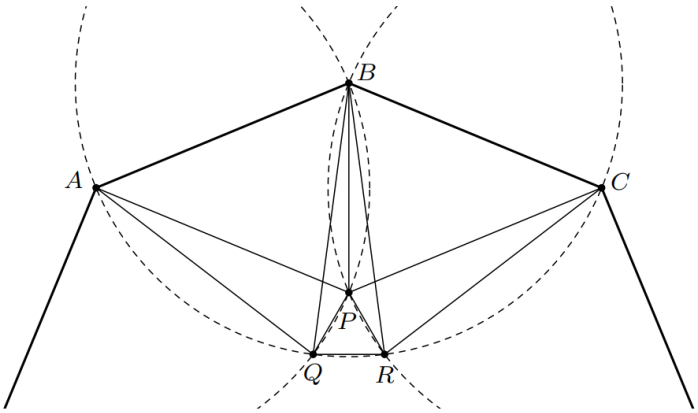
★★**Opgave T5.3 (Tweede Ronde 2000).** Gegeven is een parallellogram $PQRS$. Twee gelijkbenige en gelijkvormige driehoeken driehoeken QPA en SPB worden buiten het parallellogram getekend met tophoeken Q en S.
Bewijs dat driehoek RAB gelijkvormig is met de driehoeken QPA en SPB.

★★**Opgave T5.4 (Eerste Ronde 2001).** In de figuur staat een grote rechthoek getekend die onderverdeeld is in 9 kleinere rechthoeken. In 5 van die kleine rechthoekjes staat een getal dat de omtrek van die rechthoek aangeeft.
Bepaal de omtrek van de grote rechthoek.

	18	
18	22	20
	16	

★★★**Opgave T5.5 (Tweede Ronde 2020).** Drie opeenvolgende hoekpunten A, B en C van een regelmatige achthoek zijn de middelpunten van cirkels die door de naburige hoekpunten gaan. De snijpunten P, Q en R van de drie cirkels, zoals in de figuur weergeven, vormen een driehoek.

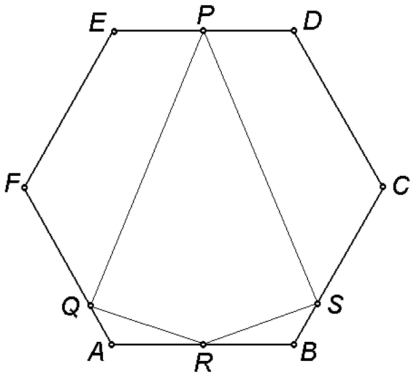




Bewijs dat driehoek PQR gelijkzijdig is.

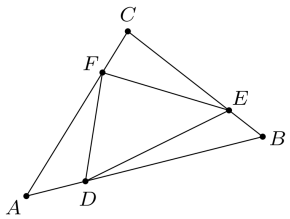
z.o.z.

★★★**Opgave T5.6 (Eerste Ronde 2005).** Op een biljart in de vorm van een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde 4 wordt een bal gestoten vanuit P richting Q. Bereken de lengte van de afgelegde weg $PQRSP$, waarbij je de afmetingen van de bal verwaarloost. P is het midden van DE en R is het midden van AB, Q ligt op AF en S ligt op BC.

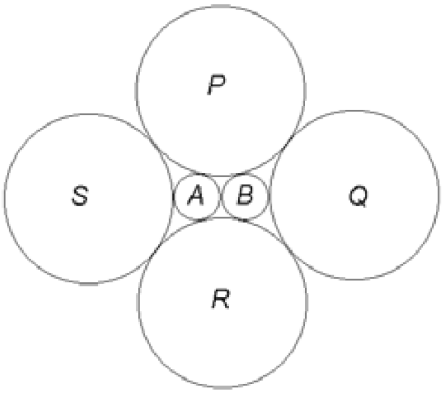


5.3.7 Toets 6 (4 uur)

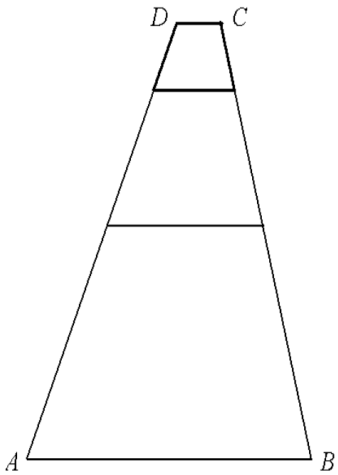
★★**Opgave T6.1 (Tweede Ronde 2017).** Gegeven is een driehoek ABC met oppervlakte 40. Op zijde AB ligt punt D zodanig dat $|BD| = 3 \cdot |AD|$. Op zijde BC ligt punt E zodanig dat $|CE| = 3 \cdot |BE|$. Op zijde CA ligt punt F zodanig dat $|AF| = 3 \cdot |CF|$.
Bepaal de oppervlakte van driehoek DEF.



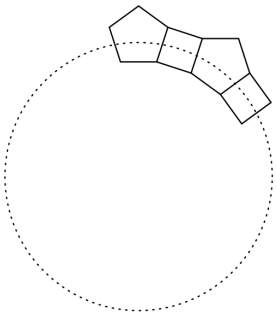
★★**Opgave T6.2 (Tweede Ronde 2004).** Twee cirkels $A en B$, beide met straal 1, raken elkaar uitwendig. Vier cirkels P, Q, R en S, alle vier met dezelfde straal r, liggen zo dat
P uitwendig raakt aan A, B, Q en S,
Q uitwendig raakt aan P, B en R,
R uitwendig raakt aan A, B, Q en S,
S uitwendig raakt aan P, A en R.
Bereken de lengte van r.



★★**Opgave T6.3 (Eerste Ronde 2007).** Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met zijden $|AB| = 16$, $|BC| = 21$, $|CD| = 2$ en $|DA| = 28$. Verder is AB evenwijdig met CD. Twee lijnen die evenwijdig zijn met AB en CD verdelen vierhoek $ABCD$ in drie gelijkvormige vierhoeken.
Bereken de omtrek van de kleinste van die drie vierhoeken.

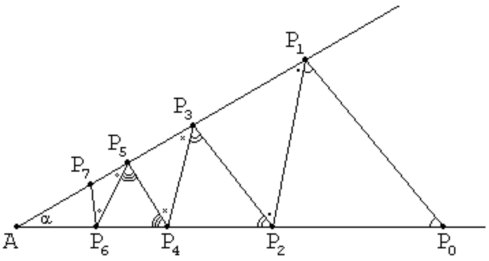


★★**Opgave T6.4 (Eerste Ronde 2018).** Als je de getekende keten van vierkanten en regelmatige vijfhoeken op dezelfde manier voortzet, sluit hij dan na helemaal rond te gaan precies op zichzelf aan? Zo ja, hoeveel vijfhoeken bevat de keten dan in totaal?

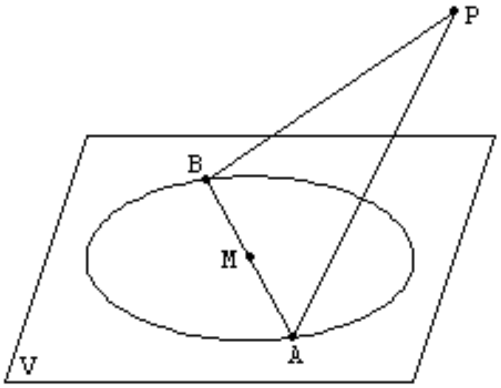


z.o.z.

★★★**Opgave T6.5 (Tweede Ronde 1991).** Gegeven zijn een hoek $A = \alpha$ met $0 < \alpha < \pi$ en het punt P_0 op een van de benen van de hoek met $AP_0 = 2$. Op het andere been van de hoek wordt een punt P_1 gekozen. Voor zover mogelijk worden nu de punten $P_1, P_2, P_3, P_4, ...$ getekend steeds zo dat P_n ligt tussen A en P_{n-2} en $\Delta P_n P_{n-1} P_{n-2}$ gelijkbenig is met top P_n (dus $|P_n P_{n-1}| = |P_n P_{n-2}|$ voor $n \geq 2$).
Zie tekening waarbij de rij afbreekt na P_7.
(a) Bewijs dat er bij elke waarde van α precies één punt P_1 gekozen kan worden zodanig dat de rij $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ niet afbreekt.
(b) Gegeven is dat de rij $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ niet afbreekt en dat de lengte van het gebroken (zigzag) lijnstuk $P_0 P_1 P_2 P_3 ... P_k$ tot 5 nadert als k naar oneindig gaat.
Bereken de lengte van $P_0 P_1$.



★★★**Opgave T6.6 (Tweede Ronde 1993).** In een vlak V ligt een cirkel C met middelpunt M. P is een punt dat niet op de cirkel C ligt.
(a) Bewijs dat $AP^2 + BP^2$ constant is bij vaste P voor elke middellijn AB van C.
(b) AB is weer een willekeurige middellijn van C en P is nu een variabel punt op een bol die het vlak V niet snijdt. Hoe moet P op de bol gekozen worden zodat $AP^2 + BP^2$ minimaal is?



5.4 En verder...

Je hebt het hoofdstuk meetkunde doorlopen. Wat nu?

Ten eerste, scan nog een keertje alle thema's. Bekijk eventueel opgaven die je moeilijk vond of opgaven die een interessante oplossing hadden. Daarna ben je eigenlijk wel klaar.

Maar als je geïnteresseerd bent in de meetkunde zul je nooit klaar zijn! Want er is zoveel dat je nog kunt leren of maken. Ik zet ze even op een rijtje.

5.4.1 Parmenides51

Een gebruiker genaamd Parmenides51 heeft een website gemaakt met erg veel meetkunde opgaven. En daarmee bedoel ik ERG VEEL. Meer dan 14.000 opgaven! En al deze opgaven hebben een link naar een forum post op AoPS. En die forum post bevat vaak meerdere oplossingen. Al wel een probleem met deze website is dat de opgaven niet gesorteerd zijn gebaseerd op thema of moeilijkheidsgraad, maar op bron. Maar ik zou daar niet al te bang voor zijn. Wat je zou kunnen doen bijvoorbeeld is om opgaven te scannen totdat je ééntje vindt dat je leuk lijkt of interessant lijkt. Let op: niet totdat je ééntje vindt dat je MAKKELIJK lijkt. Maar behalve dat klein probleempje is deze website een hele waardevolle bron van oefenopgaven.

Hier is deze wereldberoemde site: https://imogeometry.blogspot.com/p/blog-page_2.html

5.4.2 YouTube

Hier zijn een paar aangeraadde YouTube kanalen die meetkunde opgaven ook wel bespreken.

Aangeraadde kanalen (op volgorde):

1. Michael Penn: https://www.youtube.com/@MichaelPennMath
2. Shefs of Problem Solving: https://www.youtube.com/@ShefsofProblemSolving
3. MindYourDecisions: https://www.youtube.com/@MindYourDecisions

Verreweg Michael Penn heeft de meeste content. Hij bespreekt hele leuke meetkunde opgaven uit heel de wereld. Hij had zelfs ook een paar uit Nederland besproken! Het probleem met Michael Penn is dat hij niet veel uitlegt over hoe je aan iets moet komen. Hij presenteert slechts de uitwerking van opgaven. Hier is waar Shefs of Problem Solving veel beter is. De host legt alles uit en je hebt echt het gevoel dat je met hem meedenkt. Shefs of Problem Solving wordt gepresenteerd door een IMO-deelnemer.

MindYourDecisions gaat minder diep dan de andere YouTube kanalen. Zijn video's gaan vooral over kleinere puzzels dan grote opgaven waar er veel stappen nodig zijn. Zo bespreekt hij niet IMO opgaven of opgaven op die niveau. En als hij dat doet legt hij niet veel uit en geeft hij niet veel advies. Maar dat is ook helemaal prima, omdat de opgaven die hij bespreekt vaak ook leuke interessante opgaven zijn.

5.4.3 Werkbladen

Er zijn veel werkbladen die je gratis kunt downloaden van afgelopen trainingsessies. Deze zijn vaak gefocust op een bepaalde theorie. Maar de meeste hebben ook opgaven daarna die het besproken theorie toepast.

Aangeraadde werkbladen (op volgorde):

1. Nederlandse IMO-Training website: https://dc.wtb.tue.nl/lefeber/imotraining/index.html
2. Evan Chen: https://web.evanchen.cc/olympiad.html
3. Yufei Zhao: https://yufeizhao.com/olympiad/

De Nederlandse IMO-Training website kan best verwarrend zijn. De training is namelijk ingedeeld in groepen. Wat vooral belangrijk is om te weten is dat groep α het makkelijkst is en groep β wat moeilijker, groep γ wat moeilijker, etc. Maar het gaat hier om IMO-Training dus niet relatief gezien, zijn de werkbladen van groep α al best taaie.

Evan Chen en Yufei Zhao maken vooral zeer technische werkbladen. Maar, ik raad ze ook aan omdat ze ook enkele minder technische werkbladen gemaakt hebben die erg leerzaam zijn. Ze kiezen hele interessante opgaven waarvan je veel kunt leren. Maar vermijd dus die zeer technische werkbladen, want daar heb je niks aan.

5.4.4 Boeken

Aangeraadde boeken (op volgorde):

1. Alfred S. Posamentier en Charles T. Salkind - "Challenging Problems in Geometry" (vanaf €10 nieuw): https://www.amazon.com/Challenging-Problems-Geometry-Dover-Mathematics/dp/0486691543
2. Paul Zeitz - "The Art and Craft of Problem Solving" (vanaf €60 tweedehands): https://www.amazon.com/Art-Craft-Problem-Solving/dp/0471789011
3. Evan Chen - "Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads" (vanaf €80 tweedehands): https://web.evanchen.cc/geombook.html
4. Stefan Lozanovski - "A Beautiful Journey Through Olympiad Geometry" (GRATIS): https://www.olympiadgeometry.com/the-book.html

Het boek door Posamentier is erg goed: vol met opgaven die allemaal op NWO niveau zijn. En dat er niet teveel theorie wordt uitgelegd, maar dat de bekende theorie, bijvoorbeeld de Stelling van Pythagoras en gelijkvormigheid wordt uitgebreid. Dit is echt een perfect boek als je beter wil worden in het oplossen van meetkunde opgaven van de NWO.

Het boek door Zeitz is een algemenere boek. Het heeft één hoofdstuk over meetkunde die veel leuke opgaven bevat en de theorie wordt met veel voorbeelden uitgelegd. Ik raad het aan voor mensen die een beetje meer theorie willen weten, maar niet zoveel dat de meeste die hij dan leert nutteloos is.

Het boek door Chen gaat heel erg diep in de meetkunde. Je zult allerlei zeer lastige opgaven tegemoet komen waarbij zeer technische stellingen gebruikt worden. Waar je wel op moet letten, is dat dit boek niet per se je zult helpen als je het goed wilt doen in de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Het is meer een lange termijn investering waard waar je bijvoorbeeld een paar bladzijdes elke zondag doorloopt. Want ik zou niet teveel tijd stoppen in het leren van allerlei nieuwe dingen maar meer in het ontwikkelen van inzicht omtrent de stellingen en dergelijke die je al kent. Wat ik je aanraad, is om steeds opgaven die een beetje te lastig zijn te maken, totdat je in een uitwerking een stelling tegenkom waarvan je nog nooit gehoord hebt. Dan pas, is het het waard om die stelling te leren. Ik zou niet van tevoren duizenden stellingen gaan stampen.

Maar stel je vindt het zo leuk om theorie te leren... dan raad ik je aan om over Inversies te leren. Het opent een heel nieuwe inkijk op de meetkunde. Google het maar. Je zult veel werkbladen, boeken en dergelijke vinden.

En dat boek door Lozanovski heb ik niet echt gebruikt. Maar, ik weet dat veel mensen het wel aanraden, vandaar dat ik het ook aanraad. De grote pluspunt natuurlijk is dat het gratis is. Download het en kijk even of het wat voor je is.

5.4.5 Laatste woord...

Heel erg bedankt voor het lezen!

Veel succes!

Dag.

6 Hints

M1.
(a) Druk zoveel mogelijk hoeken uit in zo weinig mogelijk variabelen.
(b) Teken CE. Welke driehoeken lijken gelijkvormig? Welke driehoeken moeten gelijkvormig zijn zodat $2|AD| = |ED|$?
Opgave

M2. Wat is de waarde van $O(BCS) : O(BCA)$? Hoe weet je dat? En de verhoudingen tussen welke oppervlaktes weet je nog meer? En hoe kun je daarmee tot $CS : FS$ komen?
Opgave

M2.7. Teken lijnen IB, CG en AH.
Opgave

M3. Teken een lijn zodat je gelijkvormigheden krijgt, waarmee je $CS : FS$ kunt berekenen. Bedenk voor jezelf een enerlaatste stap terwijl je allerlei lijnconstructies probeert waarnaar jouw intuïtie wijzen.
Opgave

M3.5. Teken een zeer nette diagram waarbij je tekent waar precies die lijn B_1C_1FG zal zijn. Bewijs dat de lijn tussen A en $\overline{BC}$ parallel ligt aan $\overline{BC}$.
Opgave

M3.7. Teken $\Delta ANA'$, waarbij A' de punt A is gespiegeld in de lijn MN.
Opgave

M4.
(a) Hoe kun je bewijzen dat $CFDE$ een rechthoek is? Wat is de enerlaatste stap hier?
(b) Alweer, wat is de enerlaatste stap? Wat kan je bijvoorbeeld qua hoeken bewijzen om te bewijzen dat EF die cirkel raakt?
Opgave

M4.7. We gebruiken de stelling dat de middelloodlijn van een koorde door de middelpunt moet gaan. We moeten dus bewijzen dat $\angle AGO = 90°$. Bewijs dat $ABGC$ en $ABOC$ op één cirkel liggen.
Opgave

M5. De stelling van Pythagoras en zijn omgekeerde...
Opgave

M6.
(a) Je moet bewijzen dat $|KP'| = |KQ'| = |KR'|$. Welke zijdelengtes blijven constant na de spiegeling van M door ΔABC?
(b) Gebruik wat er bij (a) in de opgave is gevraagd om te bewijzen...
Opgave

M7. Druk de som uit in de oppervlakte van de grondvlak.
Opgave

M8. Gebruik de cosinusregel!
Opgave

M8.9. Geef op.
Opgave

M9. Bewijs dat de afstand van M tot AB steeds hetzelfde blijft.
Opgave

M9.10. Kijk eerst naar wat er gebeurt als X op zijn plaats blijft en Y een rondje maakt.
Opgave

7 Lessen

Meetkunde

Opgave M1.

Opgave

OPLOSSING

(a)
(1) Bewijs dat $\angle DEC$ gelijkbenig is met tophoek $\angle E$.
(2) Stel $\angle DCA = \alpha$ en $\angle CAB = \beta$. Bewijs dat $\angle BCE = \beta$. Gebruik onder andere het gevraagde van (1).

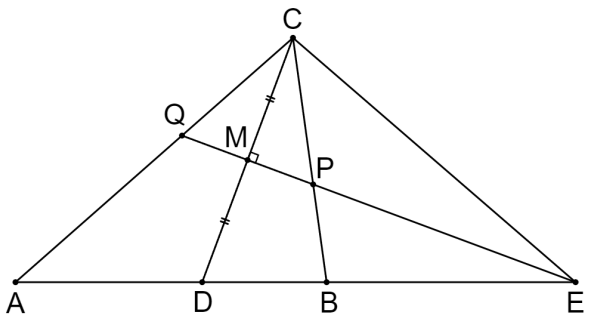
(b)
(1) Bewijs dat $\Delta ACE \sim \Delta CBE$.
(1) Stel $b = |AD|$ en $a = |BD|$. Bewijs het gevraagde met het gevraagde van (1).

BESPREKING

(a) is slechts een kwestie van "hoeken jagen". Daarover wordt later meer over verteld. Je moest namelijk een bepaalde hoek α noemen en een andere β en dan kon je alles berekenen door middel van eigenschappen van de gelijkbenige driehoek ΔDEC en de hoekensom van een driehoek en andere trivialere stellingen zoals dat een gestrekte hoek 180° is en overstaande hoeken gelijk zijn.

(b) is wat lastiger. Toen ik (b) zag, vermoedde ik dat ik iets met de gegeven lengtes van AB en BE moest doen, omdat (b) een zijdelengte verhouding bewezen wilt hebben.

Ik zie dat ik beschikking heb tot veel lengtes en hoeken vanwege (a), dus leek het mij handig om te kijken naar gelijkvormigheid. Hoewel de oplossing meteen vrijkomt wanneer je ziet dat $\Delta ACE \sim \Delta CBE$, en dit is ook de gelijkvormigheid dat in de officiële uitwerking voorkomt, had ik een andere methode gebruikt. Ik had gebruikt dat $\Delta BPE \sim \Delta CQE$ (hh) en $\Delta AQE \sim \Delta CPE$ (hh). En het gevraagde volgt direct uit deze twee gelijkvormigheden.



Uit deze bespreking wil ik dat je ervan leert dat dezelfde opgave soms meerdere oplossingen kan hebben. En ik wil graag ook benadrukken dat de officiële uitwerkingen van een opgave altijd zo gekozen is om de mooiste elegantste oplossing te tonen. De oplossing die door jou gevonden wordt zal zelden zo elegant zijn, maar dat maakt niet uit! Een oplossing is een oplossing!

Hoewel ik in de bespreking "zag" dat bepaalde gelijkvormigheden zo zijn, moet je ze ook bewijzen. In de NWO Finale en C-opgaven van de Tweede Ronde is dat ook verplicht in een toets als je alle punten wilt behalen voor die opgave. En hoewel het bij A- en B-opgaven niet nodig zijn, willen we jou nog steeds aansporen om alles toch netjes te bewijzen omdat anders wiskunde slechts een gokspelletje wordt: je zult niet weten of wat je zegt echt klopt of niet.

THEMA: GELIJKVORMIGHEDEN EN CONGRUENTIES

Je moet ten eerste wel inzien wanneer je gelijkvormigheden en congruenties nodig zal hebben. In de NWO heb je ze eigenlijk wel altijd nodig omdat vrijwel alle meetkunde opgave daaromheen draaien. Dus ik raad je sowieso aan om altijd gelijkvormigheden en congruenties te proberen te vinden en dan te proberen te gebruiken om verder in de opgave te komen. Maar zelfs bij IMO opgaven is het altijd handig om naar gelijkvormigheden en congruenties te zoeken omdat ze zo vaak handig blijken bij meetkunde opgaven! Maar let wel op om niet vast te lopen. Als je geen gelijkvormigheden en congruenties kan vinden die je helpt de oplossing te bereiken, moet je iets anders proberen!

(I) Angle-chasing of in het Nederlands: hoeken jagen

Ten eerste, wat is hoeken jagen? Noem een hoek α en een hoek β en ga met hoekensommen, overstaande hoeken, etc. zoveel mogelijke hoeken uitdrukken in α en β. Zo kan je een veel beter gevoel voor de meetkundige opstelling opbouwen. En soms is het zo dat je dan twee hoeken ziet die hetzelfde blijken te zijn en je dus een eindje helpt met het bewijzen van een gelijkvormigheid waarnaar je streeft bijvoorbeeld.

Het is wel belangrijk om te zeggen dat bij hoeken jagen niet teveel letters gebruikt moet worden. Vaak zijn 2 letters al meer dan genoeg.

Verder is het ook zo dat wélke hoek je als α of β stelt heel erg belangrijk is. Vaak kan je dat gewoon stellen als de hoek waarnaar je op zoek bent, maar soms is dat niet zo handig, omdat je vanuit die hoek bijvoorbeeld niet erg veel hoeken kan berekenen omdat ze "onbereikbaar" zijn. Dan moet je bijvoorbeeld overwegen om een ander hoek α te noemen.

Laten we kijken naar een voorbeeld:
★★**Opgave M1.V1 (BMO1 1995).** Driehoek ABC heeft een rechte hoek op C. De bissectrices van de hoeken BAC en ABC ontmoeten respectievelijk BC en CA bij P en Q. De punten M en N zijn de voetpunten van de loodlijnen van P en Q tot AB. Bereken hoek MCN.

Als je nou instinctief stelt dat $\angle MCN = \alpha$, zal je vastlopen. Ten minste, de opgave wordt veel lastiger. Dus hoeken jagen beginnend bij de hoek waarnaar je op zoek bent is niet altijd een goed idee. Maar je kunt altijd opnieuw proberen door bij een andere hoek te beginnen, zoals $\angle CAB$.

De crux van de bovenstaande opgave is het herkennen van de gelijkbenigheid van ΔCQN en ΔCPM met in de genoemde volgorde tophoeken Q en P. Dit komt door de bekende eigenschap van de bissectrice dat elke punt op de bissectrice van een bepaalde hoek op een even grote afstand ligt tot allebei de benen van die hoek. Dit kun je makkelijk bewijzen met de cosinus.

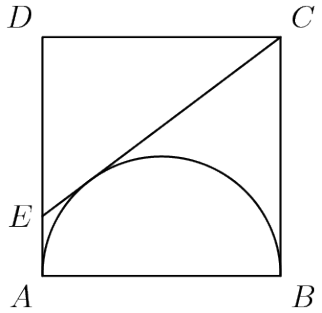
Maar die crux overwonnen hebben, blijft er niks meer van de opgave over dan gebruik van de hoekensom driehoek om $\angle MCN$ te berekenen.

Ik weet niet of jij het bij de bovenstaande opgave hebt opgemerkt, maar bij hoeken jagen zul je veel onoplosbare vergelijkingen vinden waaruit, na herleidingstappen, volgt dat $0 = 0$. Dit komt omdat het onbekende aan allebei de kanten van de vergelijking evenvaak voorkomt, waardoor ze elkaar wegstrepen en de vergelijking geen onbekende meer heeft. Dit betekent niet dat je iets fouts hebt gedaan. Het betekent alleen dat je een bepaalde gegeven opnieuw hebt gebruikt terwijl die al gecodeerd zit in de vergelijking. Het is de wiskundige versie van een drogreden zoals je vast bij nederlands zult krijgen of hebt gehad.

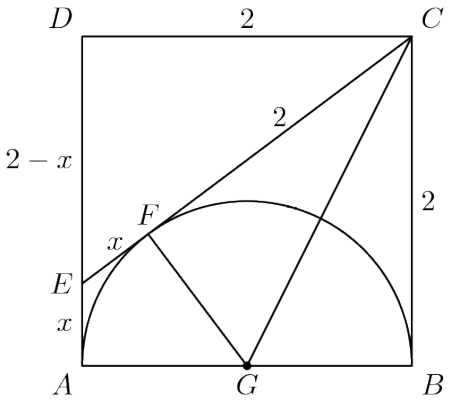
(II) Zijden jagen

Het kleine broertje van hoeken jagen. Stel een zijde als x. En ga daarmee andere hoeken berekenen. Vaak kun je dan de Stelling van Pythagoras of Speciale Driehoeken gebruiken om andere zijden in x uit te drukken. Gebruik desnoods ook trigonometrie om succesvoller naar zijden te jagen. Speciale Driehoeken, Pythagoras, Gegeven Zijdelengtes of Zijdeverhoudingen door de opgave of door een gelijkvormigheid die je hebt bewezen moeten je aansporen om naar zijden te jagen.

Tijd voor een voorbeeld:



★★**Opgave M1.V2 (AMC 10A 2004).** Vierkant $ABCD$ heeft zijdelengte 2. Er wordt een halve cirkel met diameter AB geconstrueerd binnen het vierkant, en de raaklijn aan de halve cirkel door C snijdt zijde AD in E. Wat is de lengte van CE?



Bij cirkels is het vrijwel altijd handig om de middelpunt te tekenen omdat er zoveel stellingen waarin de middelpunt of een middellijn voorkomt bestaan. Laten we dus middelpunt G tekenen. Stel dan de raakpunt van CE als F. En daarna, teken de lijnstuk GF en weet dat $\angle GFC = 90°$. Deze hulpconstructies hebben misschien wat inzicht nodig. We zullen later in dit werkstuk veel dieper op hulpconstructies ingaan. Maar de reden voor deze hulpconstructie komt eigenlijk erop neer dat we van het feit dat CE een raaklijn is gebruik willen maken. Daarna maken we gebruik van de situatie dat BC een raaklijn is en AD ook, omdat een radiuslijn van de halve cirkel elke loodrecht snijdt. Hieruit kunnen we zeggen dat $|AE| = |EF|$ en $|BC| = |CF|$. En door $|AE|$ als x te stellen, krijgen we te maken met Pythagoras op ΔCDE. Dus, $x = \frac{1}{2}$ en het gevraagde lengte is dus $2\frac{1}{2}$.

In het bovenstaand voorbeeld hebben we gezien dat zijden jagen eigenlijk langzaam opgebouwd wordt door

allemaal waarnemingen gedurende de hele opgave. Maar, zoals je later zult zien, kan het zeker bij grotere opgaven voorkomen dat zijden jagen ook een "triviale" tussenstap kan zijn waardoor je gelijkvormigheden kunt ontdekken bijvoorbeeld met zzz of zhz.

(III) Vermoedens met Correcte Diagrammen

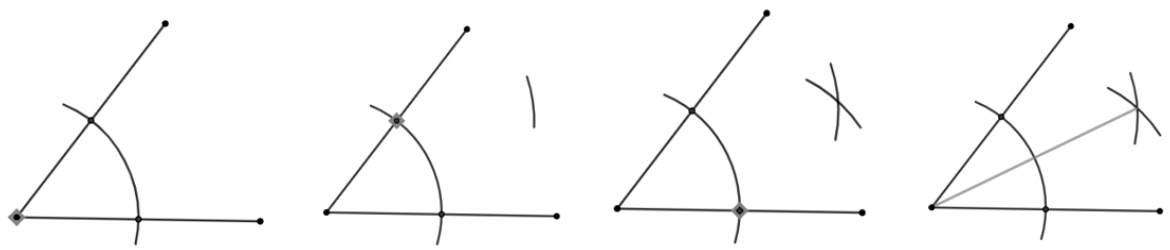
Deze strategie is eigenlijk de strategie die het voorafgaande eigenlijk voorafgaat. Want voordat je gelijkvormigheden probeert te bewijzen door middel van het jagen van hoeken of zijden, moet je natuurlijk weten naar welke gelijkvormigheden je zoekt. Dit kun je bereiken door een correcte diagram op te stellen. Je kunt daarmee namelijk vermoedens opstellen: je kunt een beetje kijken en denken dat die twee driehoeken gelijkvormig lijken en je dus daarop kan mikken omdat ze een groot kans hebben ook echt gelijkvormig te zijn bij een correcte diagram. Zeker bij grotere opgaven met ingewikkeldere diagrammen, kan het zijn dat er zoveel driehoeken zijn dat je écht moet gaan doelen met een correcte diagram omdat je anders je tijd en weg kwijt zal raken. We komen hier nog vaker op terug in latere hoofdopgaven en bijbehorende besprekingen en thema's.

Bij een correcte diagram bedoel niet alleen dat de hoeken goed afgemeten zijn en de lengtes van zijden op schaal zijn, maar ook dat alle gegeven informatie in de diagram terechtkomt. Als er staat dat $\overline{AB}$ een bissectrice is, wil ik dat je in je diagram ook zet dat de twee hoeken dan hetzelfde zijn, of dat daardoor die twee loodlijnen van dezelfde lengte zijn. Dat kun je doen door letters in te voeren: door bijvoorbeeld te tekenen dat de ene lijnstuk x en de andere ook x in lengte zijn. Voor hoeken kan je hetzelfde doen. Voor gegeven verhoudingen, bijvoorbeeld dat $|AB| = 2|PQ|$, zou je ook letters kunnen tekenen in je diagram. Bijvoorbeeld door bijvoorbeeld in je diagram te tekenen dat $|AB| = 2x$ en $|PQ| = x$.

Nog enkele tips...

(1) Teken je diagrammen GROOT. Een klein diagrammetje in de hoekje van je kladblad is écht nutteloos. Wat ik wel zou aanraden is dat je bij het lezen van de opgave eerst een klein klad-diagrammetje schetst en nadat je de hele diagram ongeveer kent, je met liniaal en passer een mooiere grotere diagram tekent.

(2) Leer een paar elementaire liniaal en passer constructies. Hoe teken je bijvoorbeeld nauwkeurig een bissectrice? Je zou misschien gewend zijn om die te tekenen door eerst de hoek te meten met je geodriehoek en dan het midden daarvan te zoeken. Maar, het kan veel nauwkeuriger met een passer! Bekijk het plaatje, het spreekt voor zich:

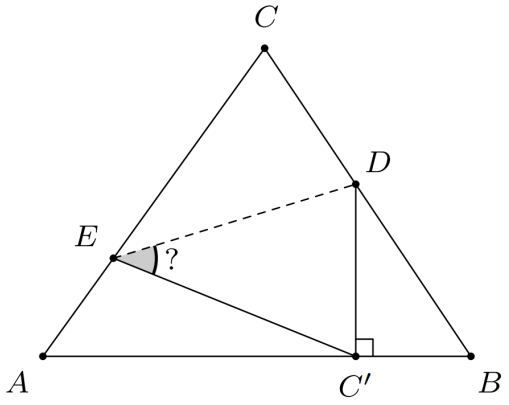


Dit is wat we liniaal en passer constructies noemen. De engelse term is misschien wat duidelijker: straightedge and compass construction. Het gaat hier dus niet om een liniaal waarmee je de lengte van iets kan aflezen. Het gaat hier om een voorwerp met een rechte zijde. Vandaar in het engels niet een "ruler", maar een "straightedge." We spreken dan van constructies waarbij er nooit gemeten hoeft te worden: noch in graden noch centimeter. Daarom zijn zulke constructies ook veel nauwkeuriger! Er zijn ook constructies die anders erg lastig zijn, zoals hoe teken je een gelijkzijdige driehoek met lengte 3 cm door te meten? Liniaal en passer constructies kunnen echt van pas komen. En het is ook super leuk. Hierbij een video met een aantal zeer goede constructies om te bestuderen: https://www.youtube.com/watch?v=rHmdtFh9wqE&ab_channel=MarcRenault

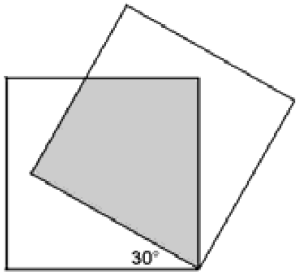
(IV) Nog één Tipje

Wanneer je eenmaal een gelijkvormigheid hebt bewezen, moet je al de eruitvolgende zijde lengte verhoudingen opschrijven en dan vervolgens alles invullen wat je kan invullen. Je zult verbaasd zijn hoe vaak het voorkomt dat er veel meer bekend blijkt te zijn dan je had gedacht! Als je bijvoorbeeld hebt bewezen dat $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, schrijf vervolgens onmiddellijk op dat $\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|QR|} = \frac{|AC|}{|PR|}$. En als je bijvoorbeeld weet dat $|AB| = 6$, vul het in de vergelijking! Vervolgens raden we je het aan om al de verhoudingen en gelijke hoeken in je correcte diagram te stoppen desnoods door middel van letters. Zoals de heuristiek aan het begin van dit werkstuk luidde: SCHRIJF ALLES OP!

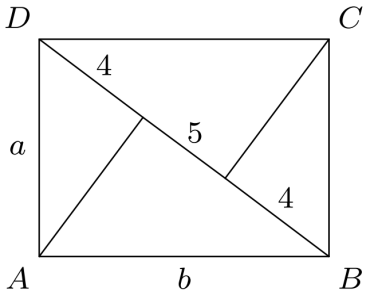
OEFENINGEN



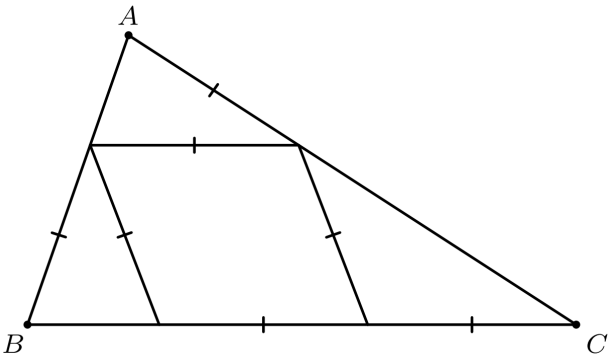
★**Opgave M1.1 (Tweede Ronde 2014).** In de figuur zie je een gelijkzijdige driehoek ABC en punten D en E op zijden BC en AC. Als je de driehoek langs de lijn DE dubbel vouwt, dan komt hoekpunt C precies op lijn AB terecht, namelijk op het punt C'.
Er geldt dat $\angle DC'B = 90°$.
Hoe groot is $\angle DEC'$?
Let op: het plaatje is niet op schaal getekend.



★**Opgave M1.2 (Tweede Ronde 2003).** Twee vierkanten met zijde 12 liggen precies op elkaar. Het ene vierkant wordt om een hoekpunt over een hoek van 30 graden gedraaid t.o.v. het andere vierkant.
Bepaal de oppervlakte van het gemeenschappelijke stuk van de twee vierkanten.

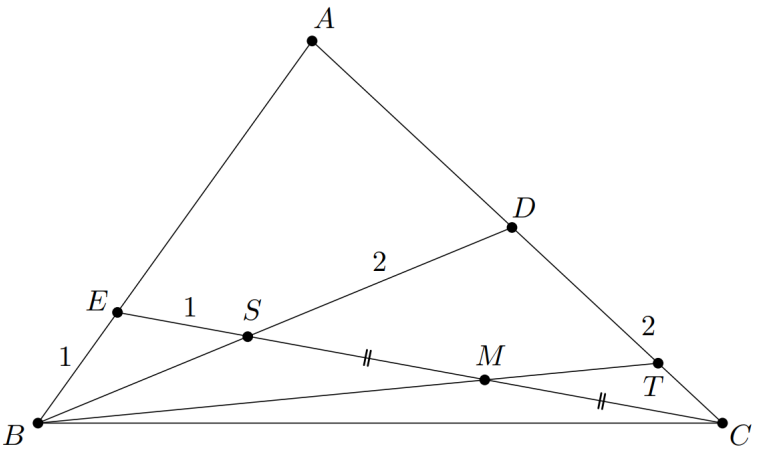


★**Opgave M1.3 (Eerste Ronde 2013).** Een rechthoek $ABCD$ heeft zijden a en b, waarbij $a < b$. De loodlijnen uit A en C op de diagonaal BD verdelen die diagonaal in drie stukken met lengtes 4, 5 en 4.
Bereken $\frac{b}{a}$.

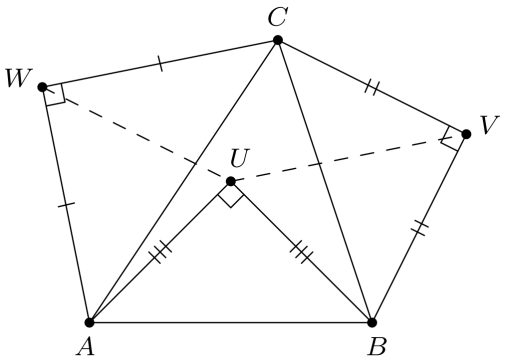


★**Opgave M1.4 (Eerste Ronde 2013).** Driehoek ABC is opgedeeld in drie gelijkbenige driehoeken en een ruit.
Hoe groot is hoek C in graden?
Let op: de figuur is niet op schaal.

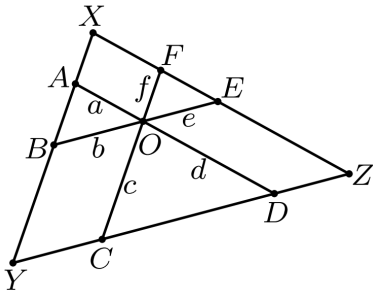
★★**Opgave M1.5 (Tweede Ronde 2012).** Gegeven is een driehoek ABC met op lijnstuk AC een punt D en op lijnstuk AB een punt E. Het snijpunt van BD en CE noemen we S. Het midden van lijnstuk CS noemen we M. De lijn BM snijdt lijnstuk CD in punt T. Ten slotte is gegeven dat $|BE| = |ES| = 1$ en $|CD| = |DS| = 2$.
Bewijs dat $|AB| = |AT|$.
Let op: Je moet je redenering stap voor stap in tekst en formules opschrijven. Dingen die alleen in het plaatje aangegeven zijn, leveren geen punten op.



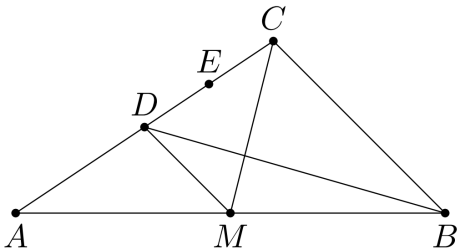
★★**Opgave M1.6 (Finale 2014).** Op de zijden van driehoek ABC zijn gelijkbenige rechthoekige driehoeken AUB, CVB en AWC geplaatst, waarbij de hoeken bij U, V en W recht zijn. Driehoek AUB ligt geheel binnen driehoek ABC en driehoeken CVB en AWC liggen geheel buiten driehoek ABC. Zie de figuur. Bewijs dat vierhoek $UVCW$ een parallellogram is.



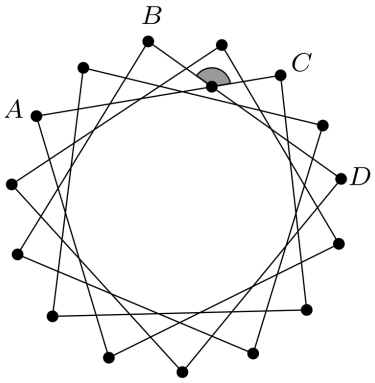
★★**Opgave M1.7 (Finale 2010).** Door een punt O in het inwendige van een driehoek XYZ gaan drie lijnen die evenwijdig zijn aan de zijden van de driehoek. Zo ontstaan op deze lijnen zes lijnstukken van O tot de zijden. Gegeven is dat de lengten a, b, c, d, e en f van deze lijnstukken positieve gehele getallen zijn.
Bewijs dat het product $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$ het kwadraat van een geheel getal is.



★★**Opgave M1.8 (Finale 2021).** In driehoek ABC geldt $\angle ACB = 90°$. Het punt M is het midden van AB. De lijn door M evenwijdig aan BC snijdt AC in het punt D. Het midden van lijnstuk CD is E. Er geldt dat BD de lijn CM loodrecht snijdt.
Let op: de figuur is niet op schaal getekend.
(a) Bewijs dat driehoeken CME en ABD gelijkvormig zijn.
(b) Bewijs dat EM loodrecht op AB staat.

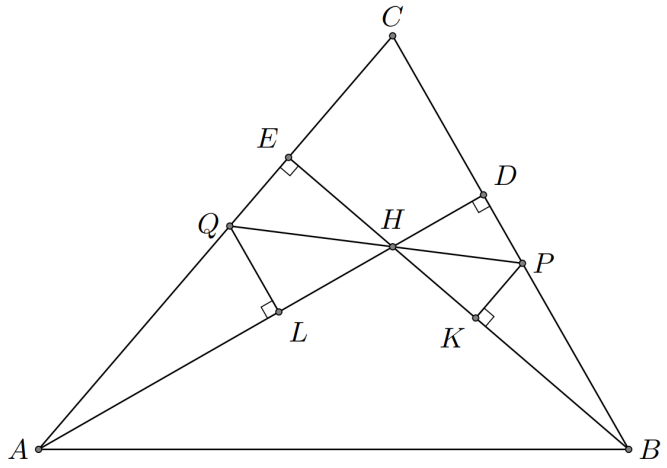


★★**Opgave M1.9 (Eerste Ronde 2011).** De hoekpunten van een regelmatige vijftienhoek worden verbonden zoals in het plaatje. (Pas op: de afmetingen in het plaatje kloppen niet precies!)
Hoe groot is de hoek, aangegeven met een boogje, tussen AC en BD?



z.o.z.

★★★**Opgave M1.10 (Finale 2012).** Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met punten D op BC en E op AC zodanig dat AD loodrecht staat op BC en BE loodrecht staat op AC. Het snijpunt van AD en BE heet H. Een lijn door H snijdt lijnstuk BC in P en snijdt lijnstuk AC in Q. Verder is K een punt op BE zodanig dat PK loodrecht staat op BE en is L een punt op AD zodanig dat QL loodrecht staat op AD.



Bewijs dat DK evenwijdig is aan EL.

<u>EINDE LES</u>

Opgave M2.

Opgave

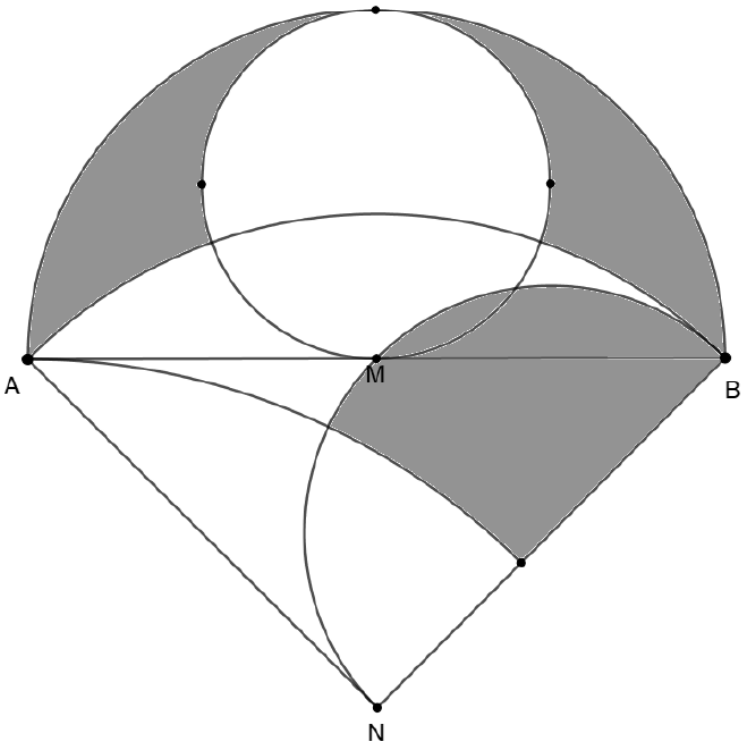
OPLOSSING

(1) Bewijs dat $O(BCS) : O(BCA) = 2 : 5$.
(2) Bereken $O(ACS) : O(ABC)$.
(3) Bereken $|CS| : |FS|$.

THEMA: OPPERVLAKTES

Deze strategieën voor het winnen over opgaven met oppervlaktes zijn aparte methoden die erg goed samen kunnen werken. Om die "synergie" te tentoonstellen, gebruiken we de volgende voorbeeldopgave die we je aanraden om ten minste een half uurtje te proberen:

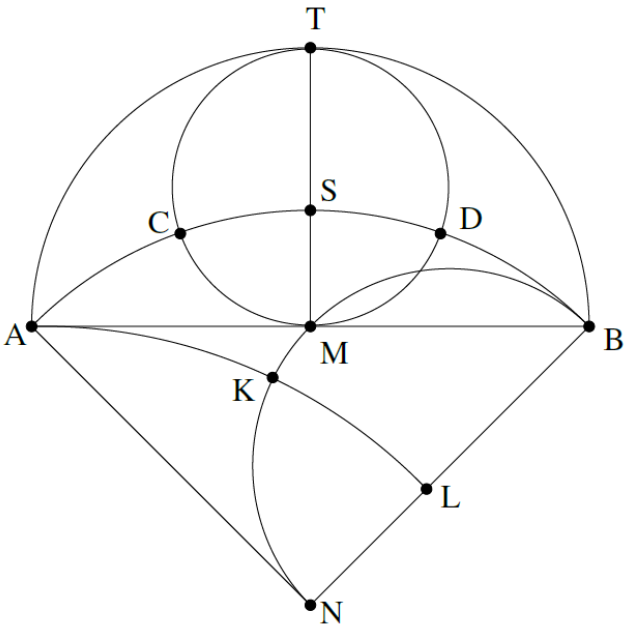
★★★**Opgave M2.V1**
(Wiskundetoernooi Nijmegen 2022).
In de figuur is M het middelpunt van AB, $|AN| = |BN|$ en de hoek bij N is loodrecht. Het lijnstuk AB heeft lengte 1, en er boven op is een halve cirkel getekend. Verder loopt er een kwart cirkel met middelpunt N van A naar B. De kromme vanuit A naar een punt op NB is een deel van een cirkel met straal $|AB|$.
Bereken de oppervlakte van het grijze gebied.



(I) Formule Analyse

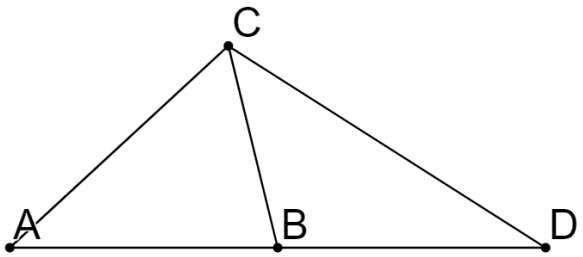
De formules voor de oppervlakte van een parallellogram, driehoek, cirkel, trapezium, etc. drukken de oppervlakte uit in de lengte van zijden of (soms) hoeken in het figuur. Dit is handig, want als je gelijkvormigheden hebt bewezen, zou je dan de verhouding tussen twee oppervlaktes kunnen berekenen door de formule op te schrijven en te kijken hoe de variabelen naar elkaar verhouden.

Voordat we formule analyse gaan toepassen op de voorbeeldopgave, is het handig om eerst wat belangrijke punten en een paar lijnen te tekenen. (Deze zijn vooral ter verduidelijking en zijn niet allemaal per se nodig om de oplossing zelf te ontdekken, want hulpconstructies worden later in dit werkstuk besproken.)



Ten eerste zien we dat: $\Delta AMT \sim \Delta ANB$ met verhouding $1 : \sqrt{2}$. Hiermee kun je met behulp van formule analyse de verhouding tussen de oppervlaktes makkelijk berekenen. Bijvoorbeeld: de formule voor de oppervlakte van een driehoek is: $O(\Delta) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$. Als we dan driehoeken ΔANB en ΔAMT bekijken, zien we dat voor de base $|AM| : |AN| = 1 : \sqrt{2}$ en hetzelfde voor de hoogte $|MT| : |BN| = 1 : \sqrt{2}$ gelden. Dus de formule zegt dan dat $O(\Delta ANB) = 2 \cdot O(\Delta AMT)$. Dit is erg simpel, maar zie je hoe je dat bij allerlei driehoeken kunt gebruiken? Bekijk steeds gewoon de hoogte en basen en hoe ze veranderen.

Een vaakvoorkomende opstelling dat je bij formule analyse zal zien is die van twee driehoeken die op elkaar "leunen." (Zie figuur rechts.) Wat je moet weten is dat de hoogte van ΔABC gelijk is als de hoogte van ΔBDC. Dus, bij zo'n vaakvoorkomende opstelling, moet je weten dat $O(\Delta ABC) : O(\Delta BCD) = |AB| : |BD|$. Let wel op dat dit alleen geldt opdat A, B en D collineair zijn.



(II) Copy-Paste Methode

De Polya-Methode is wat de Copy-Paste Methode uiteindelijk een toepassing van is: het maken van een zeer moeilijk te berekenen oppervlakte makkelijker te berekenen door te bewijzen dat een andere vorm, waarvan zijn oppervlakte makkelijker te berekenen is, dezelfde oppervlakte heeft als die van de gevraagde vorm of een bekende verhouding verschilt daarvan. Het is een geweldig slimme techniek! En het komt erg vaak voor in de Wiskunde Olympiade.

Helaas is kopiëren en plakken soms niet makkelijk te zien omdat de opgave het moeilijk maakt om te bewijzen dat die oppervlakte precies in die andere oppervlakte past. Bij hele moeilijke opgaven, bijvoorbeeld, hebben die oppervlaktes niet eens dezelfde vorm! Wat helpt is natuurlijk een correcte diagram waarmee je kan vermoeden dat twee figuren dezelfde oppervlakte hebben. En bewijsmethoden die je zou kunnen invoeren zijn onder andere gelijkvormigheden en formule analyse.

Soms kan je niet oppervlakten letterlijk Copy-Pasten. Dan zou het kunnen dat je een ander oppervlakte kan vinden die met een bekende verhouding verschilt met de originele oppervlakte. Als je twee figuren hebt die met $\sqrt{5}$ verhouden zijn. Met die $\sqrt{5}$ bedoel ik dat elke zijde $\sqrt{5}$ keer groter is dan de corresponderende zijde van de andere figuur. Dan moet je weten dat de oppervlakte van één van die figuren $(\sqrt{5})^2 = 5$ keer zo groot is als de oppervlakte van de andere figuur. De oppervlakten van twee gelijkvormige figuren zijn een kwadraat van de schaal keer verhouden. (WAAROM? Bewijs dit eens!)

En soms is het lastig om een bepaalde gelijkvormigheid te bewijzen omdat de figuren niet bekende figuren zijn zoals driehoeken en cirkels. Dan kan je beredeneren uit gelijke constructies. Stel we hebben twee driehoeken ΔABC en ΔPQR die gelijkvormig zijn aan elkaar met verhouding λ. Dan zal de radius van de omgeschreven cirkel van ΔABC en de radius van die van ΔPQR ook met λ verhouden zijn. Dit geldt niet alleen voor de radius van de omgeschreven cirkel, maar ook voor elke constructie dat je ook maar kunt bedenken die gebaseerd zijn op de gelijkvormige driehoeken. Dus als er bijvoorbeeld in de vraag wordt vermeld dat er een halve cirkel is met PQ als middellijn, dan zal de halve cirkel dat AB als middellijn heeft ook met λ verhouden zijn. Het is ook logisch, omdat de constructies, de omgeschreven cirkel en halve cirkel in onze voorbeeld, gegrond zijn op de lengtes van de driehoeken die op hun beurt met λ verhouden zijn.

Maar goed. Neem 15 minuten om te proberen te bewijzen dat $O(KLB) = 2 \cdot O(CST)$. Bewijs het helemaal: formuleer alles totdat iedereen die het leest het zal begrijpen.

Het probleem met dit bewijs is dat je geen directe formule hebt voor zo'n vorm als KLB of CST. Maar je kunt toch wel bewijzen hoeveel keer groter de ene is dan de andere. Hoe? Omdat AMT en ANB op een soortgelijke manier geconstrueerd worden. De halfcirkel met NB als middellijn in ANB zie je ook in AMT als de halfcirkel met MT als middellijn; ze corresponderen met elkaar omdat ze op dezelfde manier relatief worden geconstrueerd: ze zijn allebei op één van de benen van de gelijkbenige en gelijkvormige driehoeken ΔANB en ΔAMT getekend.

Zo'n gelijke constructie en dat $\Delta AMT \sim \Delta ANB$ met verhouding $1 : \sqrt{2}$, kunnen we ervanuit gaan dat $|ST| : |BL| = 1 : \sqrt{2}$ en $KL : CS = 1 : \sqrt{2}$ en dus ook dat $CST \sim KLB$ met verhouding $1 : \sqrt{2}$. Wees wel voorzichtig met dit idee, want soms kan het zo lijken dat ze dezelfde constructie hebben terwijl het niet het geval is! Daarom moet je alles goed formuleren terwijl je het ook stap voor stap bewijst. Maar omdat $CST \sim KLB$ met verhouding $1 : \sqrt{2}$, krijgen we dat $O(KLB) = 2 \cdot O(CST)$, omdat $2 = (\sqrt{2})^2$. Super mooi, toch? De Copy-Paste Methode?

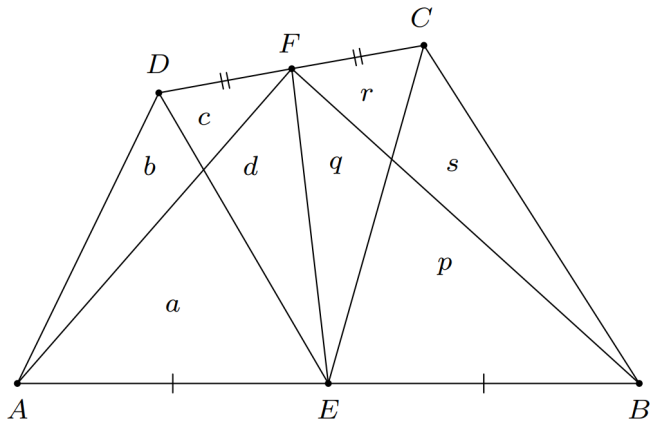
De Copy-Paste Methode wordt al duizenden jaren gebruikt. De oude grieken wilden bijvoorbeeld gemakkelijk oppervlaktes kunnen berekenen voor allerlei vormen. Ze wilden deze doel behalen door met slechts passer en liniaal constructies een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als het originele vorm. Zo was dit gelukt voor figuren zoals driehoeken. Zo'n constructie van een vierkant van dezelfde oppervlakte als een figuur noemen we de kwadratuur van dat figuur. Voor veel lastigere figuren zoals de halve maan was er geen kwadratuur in de markt. Velen dachten dat het onmogelijk zou zijn. Maar toen had de bekende Hippocrates van Chios een kwadratuur voor een halve maan gevonden. Dit wordt wel als één van de meest prestigieuze prestaties van de Oudheid gezien. Hier een video over hoe die dat deed door de bekende Presh Talwalker: https://www.youtube.com/watch?v=1uEgvF5Xfe4&ab_channel=MindYourDecisions

Ook interessant is de Kwadratuur van de Cirkel, die voor twee millenia een openstaand probleem was. En vele grote namen zoals Leonardo da Vinci hebben veel tijd gestopt in dit probleem. Totdat het onmogelijk bleek... Zie deze video indien geïnteresseerd: https://www.youtube.com/watch?v=CMP9a2J4Bqw&ab_channel=Numberphile

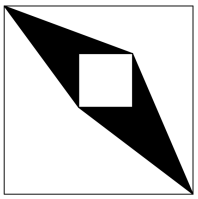
OEFENINGEN

★**Opgave M2.1 (Tweede Ronde 2014).** Gegeven is een vierhoek $ABCD$. Punt E is het midden van zijde AB en punt F is het midden van zijde CD. De vierhoek $ABCD$ wordt door AF, BF, CE, DE en EF in acht driehoeken verdeeld. De oppervlakten van deze driehoeken zijn aangegeven met de letters a tot en met d en p tot en met s, zoals in de figuur.

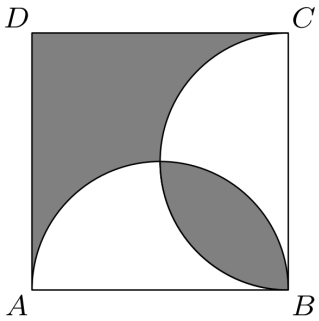
(a) Bewijs dat a + d = p + q.
(b) Bewijs dat a + r = c + p.
(c) Bewijs dat b + s = d + q.



★★**Opgave M2.2 (Tweede Ronde 2011).** Een vierkant met zijde 2 ligt binnen een vierkant met zijde 7. De zijden van het kleine vierkant zijn evenwijdig aan de zijden van het grote vierkant.
Wat is de oppervlakte van het zwarte gebied?

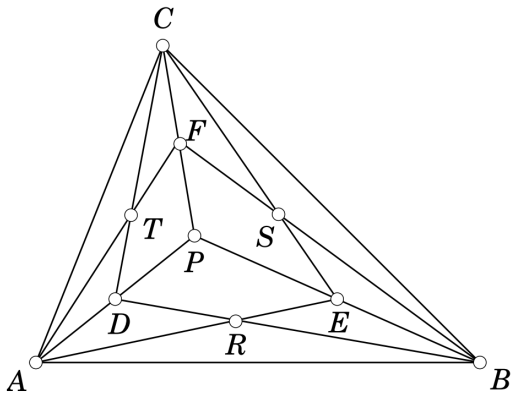


★**Opgave M2.3 (Tweede Ronde 2013).** Gegeven is een vierkant $ABCD$ waarvan de zijden lengte 4 hebben. Aan de binnenkant van het vierkant zijn twee halve cirkels met middellijnen AB en BC getekend (zie figuur).
Wat is de gezamenlijke oppervlakte van de twee grijze gebieden?



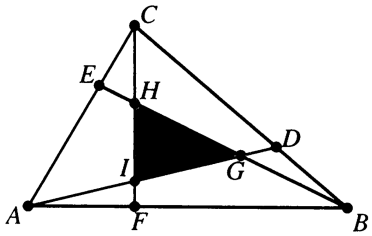
★★**Opgave M2.4 (Tweede Ronde 2018).** Driehoek ABC is gelijkbenig met top C. Het midden van AB noemen we M. Op lijnstuk CM ligt een punt D met $|CD| : |DM| = 3 : 2$. Lijn BD snijdt lijnstuk AC in punt E.
Bereken $|CE| : |EA|$. *Toevoeging: we hebben het figuur expres niet erbij getekend om je te laten oefenen met tekenen!*

★★**Opgave M2.5 (Tweede Ronde 2007).** Gegeven zijn een driehoek ABC en een punt P binnen de driehoek. Definieer D, E en F als de middens van respectievelijk AP, BP en CP. Noem verder R het snijpunt van AE en BD, noem S het snijpunt van BF en CE, en noem T het snijpunt van CD en AF.
Bewijs dat de oppervlakte van zeshoek $DRESFT$ niet afhangt van de positie van het punt P binnen de driehoek.



★**Opgave M2.6 (Eerste Ronde 2012).** Een gelijkzijdige driehoek ABC heeft zijde 12. Een halve cirkel met middellijn AB snijdt de zijden AC en BC.
Bepaal de totale oppervlakte van het grijze gebied dat bestaat uit de twee cirkelsegmenten buiten de driehoek en het deel van de driehoek buiten de cirkel. *Toevoeging: we hebben het figuur expres niet erbij getekend om je te laten oefenen met tekenen!*

Ter afsluiting wil ik deze zeer beroemde puzzel tentoonstelling:
★★★**Opgave M2.7 (The Art and Craft of Problem Solving).** Zij ΔABC. Punt D staat op BC, punt E staat op AC en punt F staat op AB zodat er geldt dat $BD : CD = CE : AE = AF : BF = 1 : 2$. Als $O(\Delta ABC) = 1$, wat is $O(\Delta GHI)$?
Hint



EINDE LES

Opgave M3.

Opgave

Oplossing
(1) Teken een lijn door S parallel aan AB.
(2) Los de rest van de opgave op met gelijkvormigheden en verhoudingen.

Bespreking
Wel gek hoe dezelfde opgave op twee hele andere manieren kan worden opgelost! Maar zo is het in de Wiskunde. Ik wil hierbij extra nadruk geven aan hoe officiële uitwerkingen vaak niet zomaar een uitwerking bevatten, maar de elegantste en kortste oplossing! Laat je dus niet ontmoedigen door zeer lastige uitwerkingen. En laat je ook niet ontmoedigen wanneer jouw uitwerking hoewel die goed is, nog lang iet zo elegant is als de uitwerking! En wees open voor andere oplossingen!

Wat te leren is van deze opgave, is dat je soms aan de verhoudingen die je van gelijkvormigheden hebt gekregen moet rekenen. Stel je hebt een lijn met drie punten A, B, C van links naar rechts. Als je de verhouding $|AB| : |AC|$ weet, is het mogelijk om $|AB| : |BC|$ te berekenen bijvoorbeeld. Dit is erg handig om te weten want moeilijkere opgaven vragen je vaak om met verhoudingen te rekenen. Om deze reden is het erg handig om zoals eerder gezegd, alle geïmpliceerde kenmerken van een gelijkvormigheid op te schrijven en ook in te vullen zodat je een mooie overzicht krijgt van wat je kunt berekenen en wat niet. Met geïmpliceerde kenmerken bedoel ik dan dat bij gelijkvormige driehoeken bijvoorbeeld de corresponderende hoeken gelijk zijn en corresponderende zijden dezelfde verhoudingen hebben.

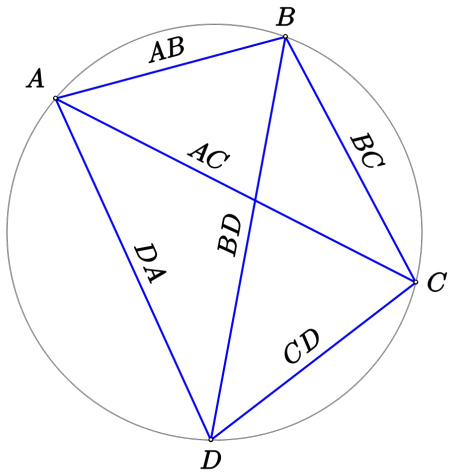
Afijn. De crux is echter niet het rekenen met verhoudingen; het is namelijk het tekenen van de hulplijn door S parallel aan AB. Maar hoe had je hierop kunnen komen? Dat laten we over aan de bespreking van de thema...

THEMA: HULPCONSTRUCTIES

Welkom bij meetkunde in de echte wereld waar de gegeven diagram niet de oplossing aanbiedt! Hulpconstructies zijn lijnen of punten die je aan een diagram toevoegt zodat de oplossing mogelijk of veel makkelijker wordt. Er zijn een oneindig aantal hulpconstructies die je kan maken, dus hoe moet je de goede zien te vinden? Hierbij geven we een aantal manieren.

Ik wil wel zeggen dat hoewel deze manieren je in een goede richting kan wenden, kunnen ze jou niet helpen behalve als je de tijd neemt om erg veel te oefenen. Hulpconstructies maken is een lastig onderwerp dat je slechts met veel ervaring kunt meesteren. De beste hulpconstructie-bedenkers zien vaak in de diagram of constructie van een meetkunde opgave hoe die een beetje lijkt op die van een opgave die zij eerder hadden gemaakt. Je kunt alleen goede constructies opbouwen door veel constructies te proberen die je interessant of mooi of goed lijken en om vervolgens veel te falen.

(I) Doelen
Het is altijd belangrijk om de heuristiek Doelen toe te passen bij hulpconstructies. Wanneer je doelt, filter je de oneindig aantal mogelijke hulpconstructies tot een telbare aantal. Vraag jezelf de vraag dus: wat is de enerlaatste stap? Wanneer je een enerlaatste stap hebt vermoed, kun je dan kijken wat voor obstakel er dan voor je zit, en dan kan je een hulpconstructie proberen te bedenken die de obstakel zal overbruggen. Laten we naar een voorbeeld kijken. Paradoxaal werkt doelen juist minder goed bij makkelijkere opgaven zoals deze hoofdopgave (M3) omdat de enerlaatste stap vaak ook de tweede of eerste stap is die je moet ondernemen, waardoor je voor het herkennen van de enerlaatste stap ook een hulpconstructie nodig zult hebben. Maar goed. Laten we kijken naar een voorbeeld waar het wél zou werken...



★★★**Opgave M3.V1.** Bewijs de Stelling van Ptolemaeus. Die zegt dat in een koordenvierhoek geldt:
$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$.

Ik stelde als punt P de snijpunt tussen AC en BD. Dan kwam eruit: $\Delta ABP \sim \Delta DCP$ en $\Delta ADP \sim \Delta BCP$. Ik had gehoopt deze gelijkvormigheden te kunnen gebruiken, maar als ik de zijdeverhoudingen die ik kreeg opschrijf, krijg ik: $\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AP|}{|DP|}$ en $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|DP|}{|CP|} = \frac{|AP|}{|BP|}$. Maar dan is het onmogelijk om de gevraagde producten hierin te vinden: $|AB| \cdot |CD|$ en $|AD| \cdot |BC|$ liggen letterlijk op elkaar en kunnen dus nooit producten

worden, hoeveel we de vergelijking ook maar algebraïsch zullen manipuleren. Dus, deze methode moest ik achterlaten.

Ik ging daarna naar hoeken en zijden jagen, maar er viel bijna niks te vinden, omdat er geen zijdelengtes noch hoeken gegeven zijn. En toen liep ik vast, want naast die gelijkvormigheden en het feit dat de overstaande hoeken tot 180° opsommen, hebben we eigenlijk niks anders. Dit was in één keer een signaal voor mij om te proberen een hulpconstructie te vinden.

Ik vroeg me toen af wat de enerlaatste stap had kunnen zijn. Wat mij zeer lastig viel was het feit dat er in de te bewezen stelling een som was, een plus-teken was. Maar gelijkvormigheden leiden alleen tot producten en nooit tot sommen. Het had dus kunnen zijn dat de rechterkant van de stelling, $|AC| \cdot |BD|$, eigenlijk ook zelf een som was. Als er nou een punt K zou zijn op AC, zou het kunnen dat de rechterkant eerst $|AK| \cdot |BD| + |KC| \cdot |BD|$ was? Dus, we zoeken dan een handige plek op AC om K op te zetten. Na wat nutteloze punten K te hebben toegevoegd, leek het mij handig om een punt K op AC te tekenen zodat $\angle ABK = \angle DBC$ met de bedoeling om de volgende gelijkvormigheid te hebben: $\Delta ABK \sim \Delta DBC$.

Hoewel ik dit niet heb gedaan, is het het waard om op te noemen dat ik toen ook vermoedens had kunnen doen over wat de stap vóór de onstaan van de vergelijking $|AK| \cdot |BD| + |KC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$ had kunnen zijn. Ik kon namelijk de twee somtermen van allebei de kanten met elkaar paren door de vergelijking in twee vergelijkingen te splitsen. Daarvoor zijn er twee mogelijkheden.

Mogelijkheid 1: $\begin{cases} |AK| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| \\ |KC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| \end{cases}$

Mogelijkheid 2: $\begin{cases} |AK| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| \\ |KC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD|. \end{cases}$

Zo, zien we dat mogelijkheid 1 de goede is. Maar mijn punt is dat je veel kunt beredeneren uit de opgave zelf door middel van vermoedens over enerlaatste stappen... en in dit geval zelfs de stap daarvoor.

Afijn. Nu dat we K hebben toegevoegd, hebben we zelfs twee nieuwe gelijkvormigheden, namelijk: $\Delta ABK \sim \Delta DBC$ (S1) en $\Delta ABD \sim \Delta KBC$ (S2). Hieruit volgt direct het gevraagde stelling, want uit (S2) krijgen we dat $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|CK|} \implies |AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot |CK|$. En uit (S1) krijgen we dat $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD} \implies |AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |AK|$. Deze twee vergelijkingen bij elkaar opgeteld hebben, voltooien we een bewijs voor de bekende Stelling van Ptolemaeus.

(II) Speurtocht

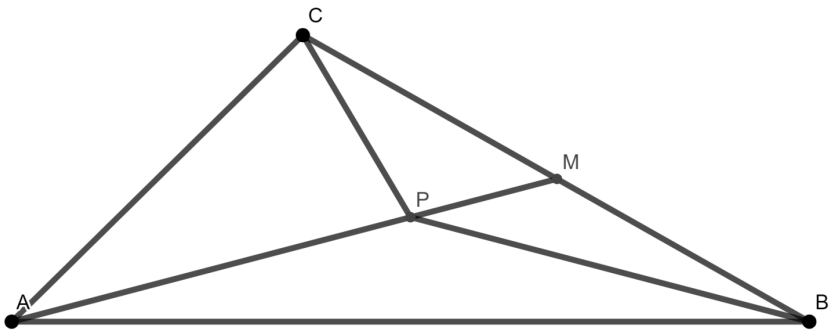
Wanneer Doelen veel te lastig blijkt, kun je ook op speurtocht. Wat bedoel ik daarmee? Ga op zoek naar mooie hoeken: 30°, 45° en 60° hoeken zouden een hint kunnen zijn om zo'n speciale $45 - 90 - 45$ of $30 - 60 - 90$ of zelfs een gelijkzijdige driehoek te tekenen. Dit is al in een opgave eerder in dit werkstuk voorgekomen, namelijk bij Opgave M1.2.

Maar laten we naar een wat wereldwijzer opgave bekijken:

★★★**Opgave M3.V2 (Ingebord Goddijn, TU Delft)** Zij ABC een driehoek met $\angle A = 45°$ en $\angle B = 30°$. Laat M het midden van BC zijn.

(a) Bewijs dat $\angle BAM = 15°$.

(b) Zij P het punt op AM waarvoor $\angle ABP = 15°$. Bewijs dat $\angle PCM = 30°$.



Mijn ervaring met (a) is dat als ik naar hoeken jaag door $\angle BAM = \alpha$ te stellen, ik dan vastloop omdat ik niks kan berekenen met de vergelijkingen die dan ontstaan omdat de α, de onbekende, steeds wegvalt waardoor de vergelijking uiteindelijk $0 = 0$ wordt. Dat is een teken dat ik misschien naar zijden moet kijken omdat de hoeken niet echt iets geven, zelfs als ik beginnend bij een ander hoek naar hoeken zal jagen.

Toen probeerde ik om naar zijden te jagen. Zo had ik gesteld dat $|CM| = |BM| = x$. Maar verder kwam ik niet. Ik doelde hier op de volgende gelijkvormigheid: $\Delta ACM \sim \Delta BCA$ want als dat waar is, zal eruit volgen dat $\angle BAM = 15°$. Eén hoek is sowieso al gelijk. Als we nou de zijden daarnaast kunnen bewijzen dat ze dezelfde verhoudingen hebben, kunnen we misschien verder komen, maar hoe kunnen we dat behalen? Dat $\angle A = 45°$ en $\angle B = 30°$ is erg toevallig. Misschien kunnen we daarmee een speciale driehoek construeren zodat we misschien de zijdeverhoudingen kunnen berekenen en vergelijken. Ik trok een loodlijn van C op AB. Noem de punt waar die loodlijn terechtkomt C'. Daarmee kreeg ik twee speciale driehoeken om mee te werken: $\Delta BCC'$ en $\Delta ACC'$. Als we nu dan doorgaan met de zijden jacht waar we eerder $|CM|$ en $|BM|$ als x stelden, komen we tot de gelijkvormigheid waarnaar we hebben gedoeld, namelijk: $\Delta ACM \sim \Delta BCA$. (DOE DIT OOK ZELF!) En daaruit volgt het gevraagde direct.

(b) is slechts een wat moeilijker variant van (a), waar wel dezelfde principes worden toegepast. Dus, die laat ik rusten als zeer nuttige oefening voor de lezer.

(III) No-Scope

Hulpconstructies komt neer op inzicht gebaseerd op ervaringen uit het verleden. Je kunt niet alles oplossen door te doelen op een enerlaatste stap of door op speurtocht te gaan. Zo is er geen stappenplan beschikbaar die ervoor zorgt dat je alle opgaven van de Wiskunde Olympiade of alle vraagstukken van de wiskunde kunt oplossen of beantwoorden. Nou... misschien behalve deze:
(1) Lees de vraag.
(2) Maak de vraag.

Als strategieën (I) Doelen en (II) Speurtocht allebei niet werken, wees niet bang om een beetje random hulpconstructies te proberen. Natuurlijk, je moet niet helemaal random hulpconstructies proberen. Je mag alleen hulpconstructies proberen die je echt doet denken aan een opgave die je in het verleden had gedaan. Of als je geen opgave in je hoofd kan krijgen, probeer dan hulpconstructies die je iets geeft; bijvoorbeeld een gelijkvormigheid die een verhouding geeft die lijkt op wat je probeert te bewijzen. Of probeer speciale lijnen of punten te tekenen: bissectrices, parallele lijnen, loodrechte lijnen, middelloodlijnen, middelpunten van lijnstukken, enzovoort. Ik moet wel erbij zeggen dat zulke gokken met speciale lijnen of punten niet echt iets zullen geven. Soms, maar gering. Het zijn vooral methoden om iets te proberen in de hoop van dat je iets ontdekt over de opgave. Je wilt niet een uur lang zitten staren naar een diagram: je moet dingen proberen hoe dom ze ook soms eruit zien. En trouwens, ik weet uit ervaring dat je soms dan in een frenzy allerlei domme hulpconstructies gaat tekenen omdat je denkt dat ééntje misschien iets zal leveren. Doe dat niet. Houd je rust en hoofd. Zelfs nadat je vijf of meer keren falende hulpconstructies hebt geprobeerd. Het kan ook voorkomen dat de opgave niet eens een hulpconstructie nodig heeft.

Laten we deze voorbeeld bekijken. Ik wil hiermee laten zien hoe hulpconstructies soms erg lastig te vinden zijn.
★★★**Opgave M3.V3 (Ingeborg Goddijn, TU Delft).** Zij ABC een gelijkbenige driehoek met tophoek $\angle C = 20°$. De punten D en E liggen op de zijden AC en BC zodat $\angle ABD = 50°$ en $\angle BAE = 60°$. De lijnstukken BD en AE snijden in punt P. Hoe groot zijn de hoeken van driehoek DEP?

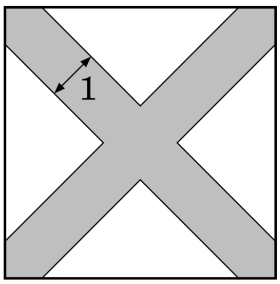
Door hoeken te jagen kom je er niet verder dan $\angle DPE$. Dus, misschien moet je dan iets met gelijkvormigheid doen? Kom je ook niet verder. Dit is een teken om op zoek naar een hulpconstructie te gaan. Het is ook niet duidelijk hoe je moet gaan doelen. Laten we dus op speurtocht gaan. Dat $\angle BAE = 60°$ is erg toevallig. Misschien kunnen we daarmee een gelijkzijdige driehoek bouwen? Maar elke wat lijkt interessante constructies werken niet. Dus (I) en (II) werken allebei hier niet.

Maar dit is dan de hulpconstructie: om een punt F op BE te zetten zodat ΔADF een gelijkzijdige driehoek is. Alles volgt er direct van uit met hoeken jagen. Het is echt een Einstein brein die je nodig hebt om hierop te komen! Laat je niet intimideren door zulke opgaven. Zoals in de inleiding van dit boek is gezegd: de beste manier om van uitwerkingen te leren is door ze te bewonderen. Maar je kunt niet uitwerkingen bewonderen zonder te hebben gespard met de opgave. Dus, je moet veel oefenen als je de superpower om hulpconstructies te zien wilt hebben.

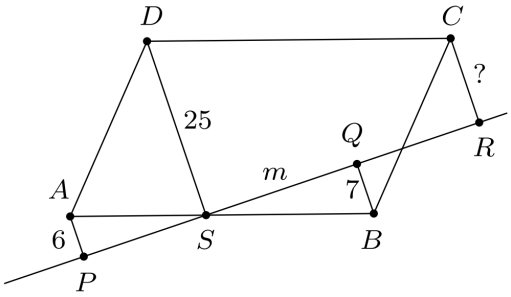
Nog enkele vervolgvragen:
(1) Kan je bewijzen dat ΔAFD een gelijkzijdige driehoek is? Triviaal is dit niet. Want hoe weet je dat zo'n hulpconstructie mogelijk is?
(2) Bewijs dat $\angle PED = 30°$. Bereken de rest van de hoeken van ΔDEP.

De hoofdopgave van deze thema (M3) maakt bijvoorbeeld gebruik van (III) No-Scope. De parallele lijn door S leek een belangrijke lijn te zijn. Er zijn geen aanwijzingen voor een parallele lijn zoals je zou willen om een succesvolle speurtocht te hebben of een duidelijke enerlaatste stap: je moest het gewoon zien vanwege ervaring of anders gevonden na veel te hebben geprobeerd door vaak No-Scope aan de trigger te trekken.

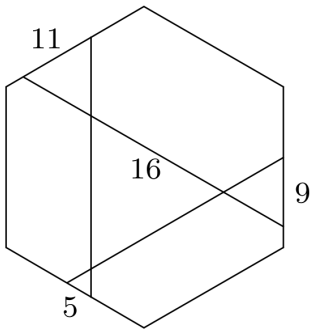
OEFENINGEN



★★**Opgave M3.1 (Eerste Ronde 2009).** Met een brede kwast worden de diagonalen van een vierkante tegel geverfd, zie de figuur. Precies de helft van het oppervlak van de tegel is geverfd. De breedte van de verfkwast is 1, zoals aangegeven. Bereken de lengte van de zijde van de tegel.



★★**Opgave M3.2 (Tweede Ronde 2017).** Een parallellogram $ABCD$ wordt gesneden door een lijn m. Vanuit de vier hoekpunten A, B, C en D laten we loodlijnen neer op lijn m. De voetpunten van deze loodlijnen zijn respectievelijk P, Q, R en S. Punt S is ook precies het snijpunt van lijn m en AB. De lengten van lijnstukken AP, BQ en DS zijn respectievelijk 6, 7 en 25.
Wat is de lengte van CR?
Let op: het plaatje is niet op schaal.



★★**Opgave M3.3 (Tweede Ronde 2013).** Een regelmatige zeshoek is door lijnen evenwijdig aan de zijden in zeven stukken verdeeld zoals in de figuur. Vier van de stukken zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan de lengtes van de zijden in de figuur aangegeven zijn.
Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek?

★★★**Opgave M3.4 (BMO1 2013).** Laat ABC een gelijkzijdige driehoek zijn, en P een punt binnen deze driehoek. Laat D, E en F de voeten zijn van de loodlijnen van P naar respectievelijk de zijden BC, CA en AB.
(a) Bewijs dat $|AF| + |BD| + |CE| = |AE| + |BF| + |CD|$.
(b) De oppervlakte van driehoek XYZ wordt aangeduid met $[XYZ]$. Bewijs dat $[APF] + [BPD] + [CPE] = [APE] + [BPF] + [CPD]$.

★★★**Opgave M3.5 (BMO1 2022).** In een acute, niet-gelijkbenige driehoek ABC zijn de middelpunten van AC en AB respectievelijk B_1 en C_1. Een punt D ligt op BC met C tussen B en D. Het punt F is zodanig dat $\angle AFC$ een rechte hoek is en $\angle DCF = \angle FCA$. De punt G is zodanig dat $\angle AGB$ een rechte hoek is en $\angle CBG = \angle GBA$. Bewijs dat B_1, C_1, F en G collineair zijn.
Hint

★★★**Opgave M3.6 (Finale 2011).** Gegeven is een driehoek ABC. Op zijde BC liggen punten P en Q zó dat $|BP| = |PQ| = |QC| = \frac{1}{3}|BC|$. Op zijde CA liggen punten R en S zó dat $|CR| = |RS| = |SA| = \frac{1}{3}|CA|$. Op zijde AB liggen punten T en U zó dat $|AT| = |TU| = |UB| = \frac{1}{3}|AB|$. Gegeven is dat P, Q, R, S, T en U op één cirkel liggen.
Bewijs dat ABC een gelijkzijdige driehoek is.

★★★**Opgave M3.7 (BMO1 2017).** De driehoek ABC heeft $|AB| = |CA|$ en BC is de langste zijde. De punt N staat op BC zodat $|BN| = |AB|$. De lijn loodrecht aan AB door punt N ontmoet AB op M. Bewijs dat de lijn MN zowel de oppervlakte als de omtrek van driehoek ABC in twee gelijke delen verdeelt.
Hint

EINDE LES

Opgave M4.

Opgave

OPLOSSING

(a)

(1) Bereken $\angle BFC$, $\angle ADB$ en $\angle AEC$ met Thales.
(2) Bewijs dat $CFDE$ een rechthoek is.

(b)

Methode (I)

(1) Zij K middelpunt van AC. Kun je zien dat $DFCKE$ spiegelsymmetrisch is? Om welke as?
(2) Bewijs dat $\angle KEF = 90°$
(3) Doe hetzelfde voor cirkel met middellijn BC.

Methode (II)

(1) Zij M_1 middelpunt van AC en M_2 middelpunt van BC. Bewijs dat $\Delta M_2CE \cong \Delta M_2FD$.
(2) Bewijs dat $\Delta M_2FE \cong \Delta M_2CD$. Gebruik het feit dat $CFDE$ een rechthoek is.

BESPREKING

De meeste leerlingen kunnen (a) gemakkelijk maken, want het is een simpele toepassing van Thales.

(b) is een toffere peer. Het vereist de heuristiek Doelen. Je moest zien te vermoeden dat de enerlaatste stap het bewijzen dat de hoek tussen de radii van allebei de kleinere cirkels en de lijn EF 90° moet zijn. Ben je ervan overtuigd dat als je dat bewijst, EF dan een raaklijn van allebei de kleinere cirkels moet zijn? Wanneer je eenmaal die enerlaatste stap hebt geïdentificeerd, zul je zien dat de rest van de opgave eruit volgt.

THEMA: CIRKELS

(I) De Middelpunt Tekenen

Cirkels zijn symmetrisch: alle radii zijn even lang en het draaien van een cirkel maakt niets uit voor de vorm. De Wiskunde Olympiade, houdend van symmetrie, zet cirkels vaak op podium. Cirkels zijn bekend om veel eigenschappen en stellingen, zoals de constante hoek, raaklijn-koord stelling, Thales, etc. Welke en waar je elke stelling moet gebruiken is lastig te zeggen in het algemeen. Maar wat ik wel zal zeggen is dat je altijd wel iets met de middelpunt van de cirkel moet gaan doen. Het is namelijk vanuit de middelpunt dat je toegang krijgt tot de symmetrieën van de cirkel. Door radii te tekenen kun je gelijkbenigheid proberen te creëren en daarmee kun je dan verder hoeken jagen bijvoorbeeld. Maak dus gebruik van zulke constructies met de middelpunt van de cirkel. Ik zeg dit nog voor de zekerheid: zo'n constructie werkt niet altijd, maar vaak!

(II) Passer!

Nog een ding is dat bij opgaven met cirkels zeker een nette tekening kan helpen! Mensen kunnen geen mooie cirkels tekenen terwijl rechte lijnen weleens meevallen. Dus, als je écht goede vermoedens wilt opstellen bij een diagram, moet je écht proberen om goede, nette, ronde cirkels te tekenen! Ik wil hier echt nadruk op leggen. Koop dus een goede passer om cirkels te tekenen! Veel passers hebben het probleem dat ze uitglijden. Ik heb ééntje die ik aanraad en die heeft een systeem waarbij die op slot gezet kan worden: https://www.bol.com/nl/nl/p/maped-stop-system-passer-3-delige-set/9200000005563569/?bltgh=j-vc65wDM2-nYOuEGfJPIg.2_29.30.ProductTitle. *NB: deze passers slot systeem werkt na een tijdje niet meer goed omdat de schroef dan losgaat (ten minste, dat gebeurde bij mij), maar dan moet je aan de achterkant gewoon de schroef dicht draaien en dan werkt het weer.*

(III) Koordenvierhoeken

Koordenvierhoeken komen nooit expliciet voor in de Nederlandse Wiskunde Olympiade, maar elke andere nationale wiskunde olympiade zet ze zo vaak in, dat ik verwacht dat op elk moment de Nederlandse Wiskunde Olympiade ze ook aan haar opgaven zal toevoegen. En sowieso, als je buitenlandse opgaven wil maken die vaak ook erg leuk zijn, is het wel handig om kennis over koordenvierhoek te hebben. We hebben benodigde stellingen over koordenvierhoeken in de voorkennis gezet, maar het leek ons alsnog nuttig om een opgave over koordenvierhoeken te bespreken...

★★**Opgave M4.V1 (BMO1 2014).** Laat $ABCD$ een koordenvierhoek zijn op cirkel ω. Laat F het middelpunt van de boog $\widehat{AB}$ van cirkel ω zijn waarbij C en D niet in boog $\widehat{AB}$ liggen. De lijnen DF en AC snijden in P en de lijnen CF en BD ontmoeten elkaar bij Q. Bewijs dat de lijnen PQ en AB evenwijdig zijn.

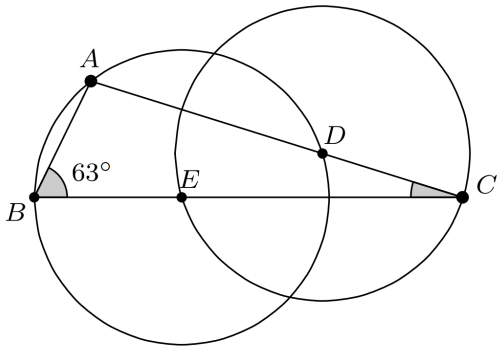
Wat is de enerlaatste stap? Dat we moeten bewijzen dat een paar Z-hoeken of F-hoeken gelijk zijn. Dat is best duidelijk, want dat is één van de weinig mogelijkheden om evenwijdigheid te bewijzen. Maar wat me in één keer lastigviel is hoe ik nou het feit zou kunnen gebruiken dat F de middelpunt is van $\widehat{AB}$. Wat ik wel leuk vond, is dat ik heel erg vaak de Constante Hoek kan gebruiken, als ik eenmaal lijnen AF en BF heb getekend. En ik zou nóg vaker de Constante Hoek kunnen gebruiken als ik nou zie dat $|AF| = |BF|$ en dus ΔAFB gelijkbenig

is. Probeer nu eens te bewijzen met behulp van de Constante Hoek dat $\angle PDQ = \angle PCQ$. Het moet niet al te lastig zijn. Wat wel volgt uit het feit dat $\angle PDQ = \angle PCQ$ is dat $CDPQ$ op één cirkel moet staan, vanwege het omgekeerde van de Constante Hoek. Zie de voorkennis als dit allemaal jou niet bekend staat. Met deze gegevens zou je kunnen bewijzen dat $\angle ABD = \angle PQD$ en dus dat $AB//PQ$. Deze opgave is niet erg lastig. Je moest maar één stelling gebruiken, namelijk die van de Constante Hoek, om herhaaldelijk naar hoeken te jagen en om de mogelijkheid te openen om hoeken te jagen door te bewijzen dat $CDPQ$ op één cirkel staat.

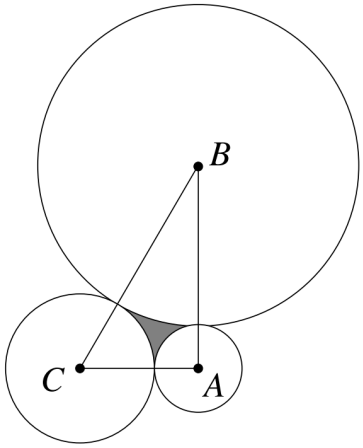
Deze opgave heeft ook een oplossing waarmee Pascals Hexagrammum Mysticum gebruikt wordt. Het is een geniale stelling dat door Pascal op 16-jarige leeftijd is ontdekt. Zie deze video voor uitleg over Pascals Hexagrammum Mysticum: https://www.youtube.com/watch?v=ALqPQSrSVks&ab_channel=MindYourDecisions
En hier is de video van de BMO zelf dat de Hexagrammum oplossing als tweede bespreekt. We hebben het hier over opgave vijf van de toets: https://bmos.ukmt.org.uk/solutions/bmo1-2015/

OEFENINGEN

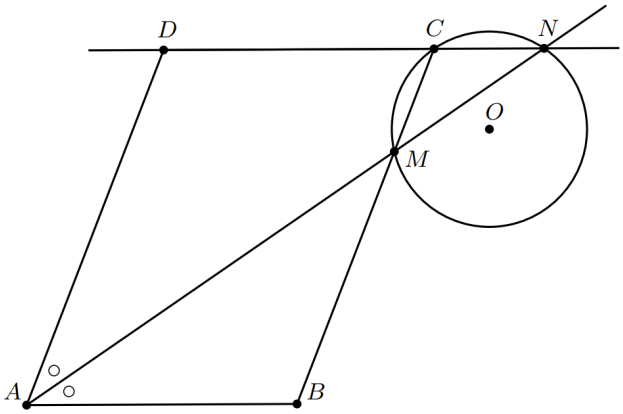
★**Opgave M4.1 (Tweede Ronde 2018).** In de figuur zie je een driehoek ABC. Hoek B is gelijk aan 63 graden. Op zijde AC ligt een punt D en op zijde BC ligt een punt E. Er geldt dat B, A en D op een cirkel met middelpunt E liggen. Ook geldt dat punten E en C op een cirkel met middelpunt D liggen.
Hoe groot is hoek C?
(Let op: de figuur hiernaast is niet op schaal.)



★**Opgave M4.2 (Finale 2010).** Gegeven is een driehoek ABC met $\angle A = 90°$, $\angle C = 60°$ en $|AC| = 6$. Drie cirkels met middelpunten A, B en C raken elkaar (uitwendig) op de zijden van deze driehoek.
Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat deze drie cirkels insluiten (het grijze gebied).



★★**Opgave M4.3 (Finale 2020).** Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $\angle A < 90°$ en $|AB| < |BC|$. De bissectrice van hoek A snijdt zijde BC in M en het verlengde van zijde DC in N. Punt O is het middelpunt van de cirkel door M, C en N. Bewijs dat $\angle OBC = \angle ODC$.

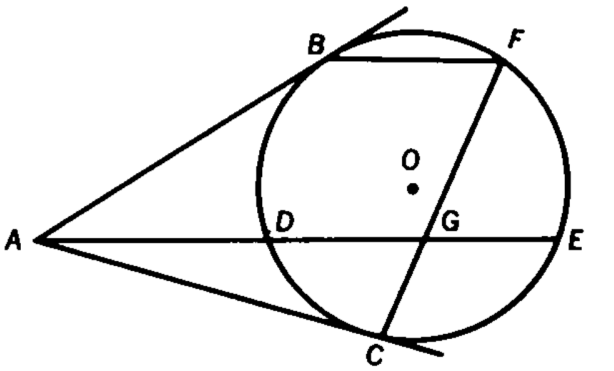


★★**Opgave M4.4 (Finale 2019).** Op een cirkel met middelpunt M liggen punten A, B en C. Het spiegelbeeld van M in de lijn AB ligt binnen driehoek ABC en is het snijpunt van de bissectrices van hoek A en hoek B. (De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke hoeken deelt.) De lijn AM snijdt de cirkel nogmaals in punt D.
Bewijs dat $|CA| \cdot |CD| = |AB| \cdot |AM|$.

★★**Opgave M4.5 (Finale 1963).** In een plat vlak zijn gegeven een rechte lijn l en een niet op l gelegen punt P. Is er in dit vlak een zodanige cirkel, dat er op l meer dan drie verschillende punten S bestaan met de eigenschap, dat de middelloodlijn van PS aan de cirkel raakt? Licht Uw antwoord toe.

★★★**Opgave M4.6 (Challenging Problems in Geometry).** AB en AC raken een cirkel met middelpunt O in respectievelijk B en C. CE is loodrecht aan diameter BD. Bewijs dat $|BE| \cdot |BO| = |AB| \cdot |CE|$.

★★★**Opgave M4.7 (Challenging Problems in Geometry).** Zij raaklijnen door punt A t.o.v. de cirkel met middelpunt O. Ze raken de cirkel op B en C. Koord BC en snijlijn ADE zijn parallel. FCc snijdt koord DE in G.
(a) Bewijs dat $\angle BAE = \frac{1}{2}(\angle BOE - \angle BOD)$.
(b) Bewijs dat $|DG| = |GE|$.
Hint



Dit was een opgave uit het boek Challenging Problems in Geometry door A. Posamentier. Heb je nog meer interesse in zulke interessante meetkunde opgaven? Koop zijn boek! Er zijn daar wel 40 opgaven van slechts cirkels! Zeer handig!

★★★**Opgave M4.8 (BMO1 2013)** In de scherphoekige driehoek ABC is punt E de voet van de loodlijn van B naar CA. Laat l de raaklijn zijn aan de cirkel ABC in B. De voet van de loodlijn van C naar l is F. Bewijs dat EF evenwijdig is aan AB.

<u>EINDE LES</u>

Opgave M5.

Opgave

OPLOSSING

(1) Teken een driehoek $\Delta M_1M_2M_3$ waarbij M_i de middelpunt is van cirkel C_i. Bewijs dat $\Delta M_1M_2M_3$ een rechthoekige driehoek is.
(2) Stel de straal van C_4 als r. Bereken r. *Tip: je moet een stelsel van drie vergelijkingen, met dus drie onbekenden, oplossen.*

BESPREKING

Het is een opgave waar je zelf een rechthoekige driehoek moet zien te maken. Hoe moet ik dat zien, zeg je? Het komt er eigenlijk op neer dat je goed vermoedens moet leren opstellen. En de enige manier om dit te doen, is door, zoals eerder gezegd, netjes te tekenen. Als je een goede diagram voor deze opgave had gemaakt, zou je in één keer kunnen herkennen dat het om een rechthoekige driehoek gaat, zeker als het gaat om een opgave waarbij lengtes van zijden wordt gegeven. Bij opgaven waar je dit bijvoorbeeld niet hebt en dus meer vrijheid hebt bij het tekenen, raad ik je aan om zelfs meerdere tekeningen van een diagram op te stellen, zeker als het niet te lastig is om te tekenen, gewoon zodat je vermoedens beter kunt opstellen omdat je dan kunt kijken welke hoeken, zijden of vormen constant blijven. En vermoedens opgesteld, kun je dan altijd de rechthoekigheid van een driehoek met de omgekeerde Stelling van Pythagoras bewijzen, zoals jij bij deze opgave zou hebben gedaan. Zie je hoe de moeilijke deel van een opgave niet per se het doorlopen van de stappen is, maar het uitkiezen welke richting je op moet?

En omtrent de stelsel van drie vergelijkingen: die zullen we bij hoofdstuk Algebra wat uitgebreider behandelen. Maar zo moeilijk is zoiets oplossen ook weer niet: het is erg vergelijkbaar met hoe je een stelsel van twee vergelijkingen oplost: een variabele maak je vrij en dan substitueer je die in een andere vergelijking. Dit werkt altijd als je zo'n stelsel van drie tot eentje van twee wil veranderen, die je dan wel hopelijk kunt oplossen. Maar wat ik eigenlijk wilde laten zien is dat meetkundige opgaven vaak bekend zijn als meer beredeneer soort vragen dan algebra vragen. Zoals de opgaven die we hiervoor hebben gezien: de meeste berekeningen zijn simpele hoeken-jagen-soort berekeningen en de rest gaat over het beredeneren door stellingen en gelijkvormigheden. Maar deze opgave toont aan dat sommige meetkundige opgaven ERG veel algebra gebruiken, zeker opgaven die gebruik maken van Pythagoras.

THEMA: PYTHAGORAS

De Stelling van Pythagoras is toegeschreven aan Pythagoras, maar niemand weet of hij het werkelijk had ontdekt of bewezen. Maar gelukkig voor een wiskundige zoals jij maakt het niet uit van wie het is, alleen maar dat het er is. Wel leuk is dat er veel bewijzen ontdekt zijn van deze stelling: meer dan wel 371! (Die uitroepteken betekent niet faculteit maar wat het normaal betekent.) Kan jij een bewijs voor de Stelling van Pythagoras bedenken?

Het is belangrijk om te weten hoe stellingen die je gebruikt bewezen kunnen worden. Weet jij hoe je de hoekensom van een driehoek kan bewijzen? Of wat is de bewijs voor Thales en zijn omgekeerde? De reden waarom dit belangrijk is om te doen, is dat je dan een diepere begrip zal hebben van de stelling, en dat zal zeker helpen bij Wiskunde Olympiade vragen waarbij je stellingen op unieke en creatieve wijze moet gebruiken. Als je meer wilt leren over bewijzen in meetkunde en zelfs over hoe meetkunde opgebouwd is, lees NU de legendarische Elementen van Euclides: `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/toc.html`. Wel gek hoe zo'n oud boek nog steeds zeer toepasselijk is voor mensen in de 21e eeuw!

Afijn. Ik heb niet veel te zeggen eigenlijk over de Stelling van Pythagoras. Onthoud alleen dat je deze stelling kan gebruiken om zijdelengtes te berekenen bij een rechthoekige driehoek of om te bewijzen dat een bepaalde driehoek rechthoekig is. Maar ik heb hier nog wat tips die misschien jou zal helpen.

(I) Schrijf Alle Vergelijkingen op!

De Stelling van Pythagoras kun je gebruiken om een bepaalde zijdelengte te berekenen, maar vaker komt het voor dat de Stelling van Pythagoras je een vergelijking zal geven die te veel onbekenden heeft. Dan zou het kunnen dat je die onbekenden zou kunnen invullen met waarden van gelijkvormigheden of andere toepassingen van Pythagoras. Wanneer je alle vergelijkingen van allerlei stellingen die je hebt toegepast op een opgave opschrijft zul je een groter kans hebben om iets te ontdekken dat je zou kunnen doen met die vergelijkingen. Misschien kun je twee vergelijkingen van elkaar af trekken, of twee vergelijkingen oplossen? Of iets substituëren? Het zou erg jammer zijn als je zoiets dan mist omdat je de ontdekte vergelijkingen gewoon niet opschrijft.

(II) Speciale Pythagoras Driehoeken

Er zijn ook speciale rechthoekige driehoeken die vaak voorkomen. Namelijk de 3-4-5 driehoek en de 5-12-13 driehoek. Het is belangrijk om te zoeken naar zulke driehoeken, omdat ze jou tijd zullen besparen met berekenen. Belangrijk is dat veelvouden van deze driehoeken ook rechthoekige driehoeken zijn. Zo is een driehoek met zijden

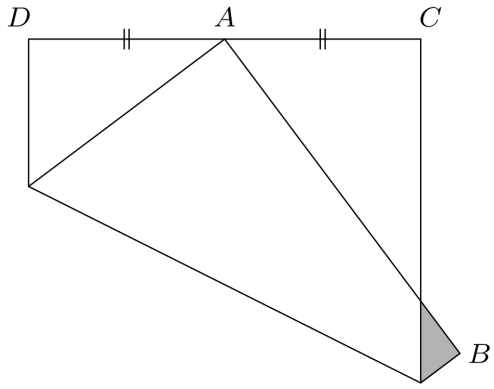
333-444-555 ook een rechthoekige driehoek. Het is slechts een met 111 keer opgeschaalde versie van een 3-4-5 driehoek.

(III) Algebra

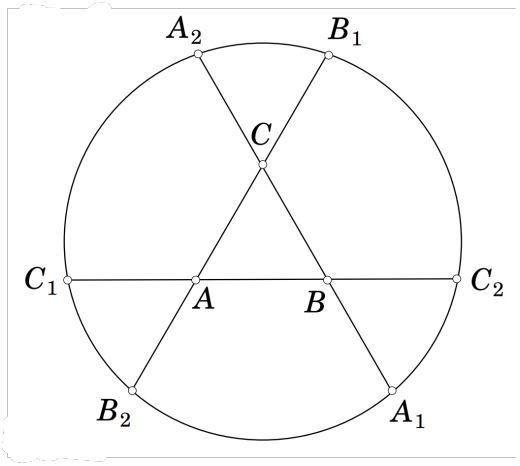
Wat ik ook wil bespreken is dat je tijdens een toets van de Wiskunde Olympiade je geen rekenmachine bij je mag hebben. Dit zou ervoor kunnen zorgen dat je na gebruik van de Stelling van Pythagoras tegen algebra komt waarmee je niet verder kan omdat er teveel wortels zijn om uit te werken bijvoorbeeld. Zo zou je moeten verwachten dat je veel kwadraten in wortels zult krijgen bij de Stelling van Pythagoras. Dan moet je goed nadenken of je verder zal gaan of niet. Als het écht te lastig is, probeer een andere methode!

Ik zeg dit omdat veel leerlingen denken dat problemen bij algebra die teveel tijd kost om op te lossen niet echt een wiskundig probleem is, en gaan dan ervanuit dat als ze daar tegenaan lopen de opgave fout zit, maar het is zeker niet zo. Veel van de wiskunde zelfs in échte onderzoek gaat over de optimalisering van algoritmes om wiskundige vraagstukken te kunnen beantwoorden omdat ze zo complex zijn. Dat een bepaalde lijnconstructie niet werkt is dus net zo'n echt wiskundig obstakel als wanneer algebra niet afgerond kan worden.

OEFENINGEN

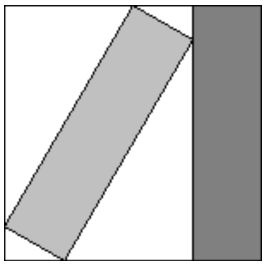


★**Opgave M5.1 (Tweede Ronde 2012).** Een vierkant $ABCD$ met zijde 8 wordt zodanig gevouwen dat hoekpunt A met het midden van CD samenvalt (zie figuur).
Wat is de oppervlakte van het grijze driehoekje?



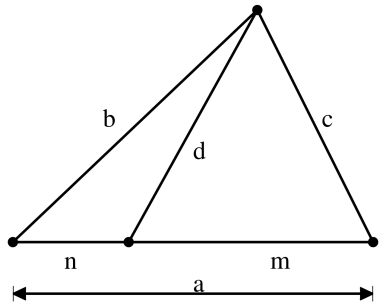
★★**Opgave M5.2 (Tweede Ronde 2007).** Bekijk de gelijkzijdige driehoek ABC met $|BC| = |CA| = |AB| = 1$. Op het verlengde van zijde BC kiezen we punten A_1 (aan de kant van B) en A_2 (aan de kant van C) zodat $|A_1B| = |BC| = |CA_2| = 1$. Analoog kiezen we B_1 en B_2 op het verlengde van zijde CA zodat $|B_1C| = |CA| = |AB_2| = 1$, en C_1 en C_2 op het verlengde van zijde AB zodat $|C_1A| = |AB| = |BC2| = 1$. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔABC is ook het middelpunt van de cirkel door A_1, B_2, C_1, A_2, B_1 en C_2.
Bereken de straal van de cirkel door A_1, B_2, C_1, A_2, B_1 en C_2.

★★**Opgave M5.3.** Bewijs het omgekeerde van de Stelling van Pythagoras. Die zegt dat als er in een driehoek met zijden a, b en c geldt dat $c^2 = a^2 + b^2$, dan driehoek abc een rechthoekige driehoek is met een rechte hoek tussen a en b.



★★★**Opgave M5.4 (Tweede Ronde 1994).** Een vierkant met ribbe 1 wordt in twee rechthoeken verdeeld, zodanig dat de kleinste van de twee rechthoeken met zijn hoekpunten op de zijden van de grootste rechthoek geplaatst kan worden, warbij elk hoekpunt op precies één zijde ligt.
Bereken de lengte en de breedte van de kleinste rechthoek.

★★★**Opgave M5.5.** Bewijs de Stelling van Stewart met behulp van de Stelling van Pythagoras. Die zegt dat er geldt (zie figuur):
$b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$.



EINDE LES

Opgave M6.

Opgave

OPLOSSING

(a)

(1) Bewijs dat $|MP| = |KP'|$. Kan je daarmee ook bewijzen dat $|MQ| = |KQ'|$ en $|MR| = |KR'|$?

(2) Bewijs dat $|KP'| = |KQ'| = |KR'|$.

(b)

(1) K is de middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\Delta P'Q'R'$. En M is de middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔPQR. Zie je dat als K en M samen moeten vallen, K zo gekozen moet worden zodat het ook de middelpunt van de omgeschreven cirkel door ΔPQR?

(2) Maak de oplossing af met je kennis over de middelpunt van de ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek.

BESPREKING

(a) is een erg moeilijke opgave. Ten eerste moet je de inzicht hebben om te kunnen Doelen op de correcte enerlaatste stap. Wat is de gedoelde enerlaatste stap bij deze opgave? En daarna moet je ook nog inzien dat je gebruik van de heuristiek Invariantie moet maken. Er zijn een oneindig aantal mogelijkheden van waar je K kan plaatsen. En dat is vaak motivatie genoeg om een invariantie in acht te nemen. Zo zien we hier bijvoorbeeld dat de invariantie is dat $|MP|$ en $|KP'|$ niet verandert na de spiegeling door M. En wat deze opgave NOG moeilijker maakt is dat $|MP|$ en $|KP'|$ niet gegeven lijnen zijn. Die moet je zelf hebben bedacht om in te tekenen. Voor mensen die nu zich afvragen hoe ze dat hadden kunnen bedenken, de hint ligt in het zien dat je als enerlaatste stap je moet bewijzen dat de afstand van K tot P', Q' en R' hetzelfde moeten zijn omdat ze radii zijn van dezelfde cirkel. Er zijn maar een aantal manieren om te bewijzen dat er een cirkel te vormen is, dus hierop had je waarschijnlijk ooit aan kunnen komen. Anders had je de hint moeten gebruiken om M ooit te gebruiken omdat het gegeven is. Je zou namelijk erop kunnen doelen om de omgeschreven cirkel door ΔPQR te gebruiken om te bewijzen dat K de middelpunt van de omgeschreven cirkel door $\Delta P'Q'R'$ is. Zo had je kunnen vermoeden dat de twee cirkels even groot zouden zijn en dus waarschijnlijk iets met elkaar te maken hebben.

(b) valt mee. Je hoeft alleen maar in te zien dat $|KP| = |KQ| = |KR|$, zodat M, de middelpunt van de cirkel door PQR op dezelfde plek komt als K. Maar wanneer $|KP| = |KQ| = |KR|$, moet K wel de middelpunt van de ingeschreven cirkel zijn, omdat de afstand van K tot de zijden van ΔABC dezelfde moet zijn als er geldt: $|KP| = |KQ| = |KR|$. Of je weet dat zo'n eigenschap K tot de middelpunt van de ingeschreven cirkel maakt, is niet zo'n groot probleem. De vraag was waar je K moest kiezen en dat had je beantwoord, zelfs wanneer je niet toegaf dat het om de middelpunt van de ingeschreven cirkel gaat. Deze opgave had je kunnen doen door een paar keer K te plaatsen en te kijken waar je dan uitkwam.

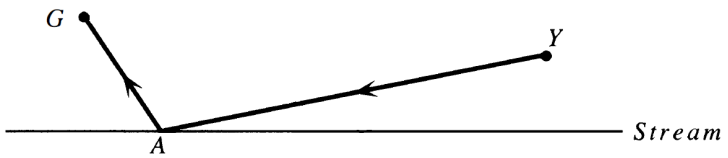
THEMA: SPIEGELINGEN IN DE MEETKUNDE

Spiegelingen in de meetkunde, geef ik toe, komen zelden voor in de Wiskunde Olympiade. Maar, ze zijn wel een favorietje onder probleemoplossers, daarom behandel ik ze als belangrijk stof. Ten eerste wil ik onderscheiden tussen twee soorten opgaven met spiegelingen: (I) opgaven waarbij je zelf iets moet spiegelen en (II) opgaven waarbij je met spiegeling te maken hebt.

(I) Zelf Spiegelen

Dit is een voorbeeld van zo'n opgave:

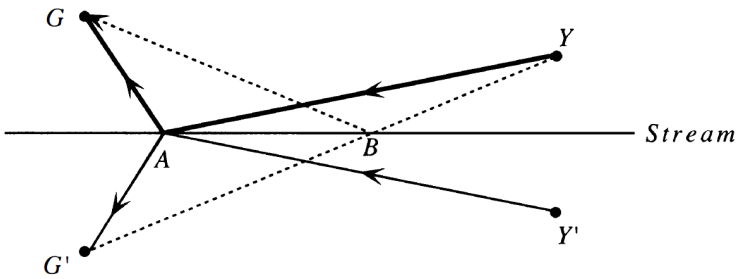
★**Opgave M6.V1 (The Art and Craft of Problem Solving).** Jouw huis is twee mijl noord van een rivier dat oost-west stroomt. Jouw omas huis is 12 mijl west en één mijl noord van jouw huis. Elke dag, ga jij van jouw huis naar die van oma, maar eerst moet je langs de rivier (om vers water te halen voor oma).
Wat is de lengte van de kortste route die je kan afleggen?



Met andere woorden, je moet uitzoeken waar je A moet kiezen op de rivier zodat $d(A, Y) + d(A, G)$ minimaal is.

Er zijn manieren om dit met calculus op te lossen, maar dat is erg veel werk. Ten eerste moet je zien weten dat het hier om twee wortels gaat, want afstanden zijn wortels en dat is al veel en lastig werk.

Maar de oplossing van deze opgave is veel eleganter. Kan jij het ontcijferen uit het volgende plaatje?



Heel simpel: reflecteer de hele opstelling om het rivier. Hierbij is $|YA|+|AG'| = |YA|+|AG|$, omdat $|AG| = |AG'|$. Omdat we reflecteren. Maar nu kun je zien dat de kortste route tussen twee punten een rechte lijn is. Dus, als je van Y tot G' een lijn teken, kan je die weer spiegelen om de kortste route te krijgen. De waarde van $|YG'|$ is dan makkelijk te bepalen met Pythagoras.

Deze methode om de opstelling slim te reflecteren is vooral handig bij opgaven waar je afstanden met een buiging zo minimaal mogelijk moet maken.

(II) Onderzoeken van Spiegelingen

Er zijn ook opgaven die zelf reflecties, bijvoorbeeld van een lichtstraal, geven en dat je vervolgens daaraan moet rekenen. Het is een stukje anders dan (I), want deze keer spiegelen om de zijde waar de lichtstraal gereflecteerd wordt zal standaard zorgen voor een rechte lijn. Dit komt doordat bij lichtspiegeling de hoek waarin het licht tegen de spiegel botst dezelfde is als de hoek waarin het licht de spiegel verlaat.

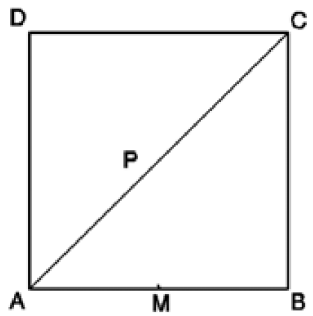
Nu dat je over allebei de soorten reflectie opgaven (I) en (II) hebt gelezen, welke soort opgave was M6?

Een leuke feit is dat licht door zo'n reflectie de kortste route zal nemen. Zo was de kortste route van de bovenstaande voorbeeldopgave de route waarbij de pad het rivier met dezelfde hoek tegemoetkomt en met dezelfde hoek verlaat. Dat licht de kortste route neemt wordt ook wel de Principe van Fermat genoemd. Deze principe, hoe simpel dan ook, heeft nuttig gebleken bij het oplossen van zelfs zeer complexe problemen zoals de bekende brachistochrone probleem. Zie deze video dat meer over deze bekende probleem gaat waarover grote namen zoals Newton en Johann Bernoulli veel hebben gedacht: https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU&ab_channel=3Blue1Brown

Oefeningen

★★**Opgave M6.1 (Tweede Ronde 2002).** De zijden van een vierkant $ABCD$ van 10 bij 10 zijn aan de binnenkant spiegelend. Een lichtstraal komt het vierkant binnen via het hoekpunt A en koerst naar het punt P op CD met $CP = 3$ en $PD = 7$. In P spiegelt het natuurlijk aan de zijde CD. De lichtstraal kan het vierkant alleen via een van de hoekpunten A, B, C of D verlaten. Wat is de afstand die de lichtstraal binnen het vierkant aflegt voordat hij het vierkant weer verlaat? Door welk hoekpunt gebeurt dat?

★★**Opgave M6.2 (Eerste Ronde 2000).** De zijden van vierkant $ABCD$ hebben een lengte 6. M is het midden van AB, P ligt op diagonaal AC zó dat $MP + PB$ zo klein mogelijk is.
Bereken de lengte van AP.

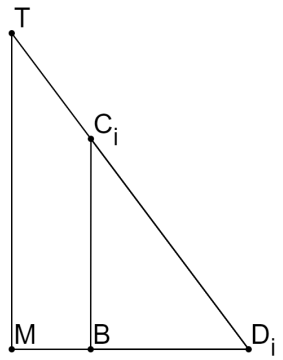


EINDE LES

Opgave M7.

Opgave

OPLOSSING



(1) Teken een bovenaanzicht van de piramide. Teken daarbij loodlijnen van B op de n zijden en lijnen BA_i voor alle i. Laat de voet van de loodlijn van B op zijde A_iA_{i+1} punt D_i zijn.
(2) Druk $|BC_i|$ uit in onder andere $O(grondvlak)$ met behulp van de zijaanzicht van de piramide hiernaast. M is de middelpunt van de grondvlak.

BESPREKING

Deze opgave is een stuk lastiger dan alle andere opgaven om zonder uitwerking te bespreken omdat het zo uniek is. Ik kan niet zeggen: ga hoeken-jagen of dergelijke. Ik zal dus eerst de opgave uitwerken voordat ik het bespreek.

Uitwerking

Ten eerste moest je de opgave tot één vlak brengen. Dat kon alleen door $|BC_i|$ tot het grondvlak te brengen. En dat kon op twee manieren:
(1a) $|BD_i| = \frac{|BC_i|}{\tan(\angle MD_iT)}$.
(1b) $\Delta TMD_i \sim \Delta C_iBD_i \implies |BD_i| = \frac{|BC_i|\cdot|MD_i|}{|TM|}$

Daarna moest je de oppervlakte van ΔBA_iA_{i+1} erbij betrekken, je krijgt dan:
(2) $O(BA_iA_{i+1}) = \frac{1}{2}\cdot|BD_i|\cdot x$, waar x de lengte is van een zijde van de regelmatige n-hoek $A_1A_2...A_n$.
En daarna kan je $|BD_i|$ vrijmaken.
(3) $|BD_i| = \frac{2\cdot O(BA_iA_{i+1})}{x}$.

Als je vervolgens de vergelijkingen van (1a) of (1b) combineer met (3), krijg je:
(4a) $\frac{|BC_i|}{\tan(\angle MD_iT)} = \frac{2\cdot O(BA_iA_{i+1})}{x}$
(4b) $\frac{|BC_i|\cdot|MD_i|}{|TM|} = \frac{2\cdot O(BA_iA_{i+1})}{x}$

Merk wel op dat $\tan(\angle MD_iT) = \frac{|TM|}{|MD_i|}$, waardoor allebei de mogelijke oplossingen eigenlijk hetzelfde zijn! Daarom zal ik vanaf nu alleen maar methode (a) uitwerken. Het uitwerken van oplossing (b) laat ik als oefening voor de lezer.

Je kan dan daarna $|BC_i|$ vrijmaken.
(5a) $|BC_i| = \frac{2\cdot O(BA_iA_{i+1})\cdot\tan(\angle MD_iT)}{x}$

En als we nu teruggaan op de som $|BC_1| + |BC_2| + ... + |BC_n|$...
(6a) $|BC_1| + |BC_2| + ... + |BC_n| = \frac{2\cdot O(BA_1A_2)\cdot\tan(\angle MD_1T)}{x} + ... + \frac{2\cdot O(BA_nA_1)\cdot\tan(\angle MD_nT)}{x}$

Maar omdat $\tan(\angle MD_iT)$ hetzelde is voor alle i omdat $\angle MD_iT$ hetzelfde is voor alle i omdat het om een piramide gaat, kunnen wij dan zeggen dat
(7a) $|BC_1| + ... + |BC_n| = \frac{\tan(\angle MD_iT)(O(BA_1A_2)+O(BA_2A_3)+...+O(BA_nA_1))}{x}$

Maar al die oppervlakten bij elkaar opgeteld is hetzelfde als $O(grondvlak)$. Dus:
(8a) $|BC_1| + ... + |BC_n| = \frac{\tan(\angle MD_iT)\cdot O(grondvlak)}{x}$

(9a) Maar dan is de rechterkant van de vergelijking constant voor waar je ook B kiest. Dus, het gevraagde is bewezen.

Bespreking

Wat deze opgave erg moeilijk maakte was dat er twee cruces waren.

Ten eerste, je moest bedenken dat je de opgave van ééntje van ruimtemeetkunde moest omzetten tot ééntje van vlakke meetkunde. Dat gebeurde in de uitwerking in stap 1. Dit komt neer op de Polya-Methode, want vrijwel iedereen weet meer over vlakke meetkunde dan ruimtemeetkunde en zelfs als dat niet het geval is:

ruimtemeetkunde is veel moeilijker om je voor te stellen dan vlakke meetkunde! Het is dus best een logische stap om dat bij ruimtemeetkundige opgaven te doen.

Als je het omzetten tot vlakke meetkunde behaald hebt, kan je de opgave als volgt formuleren: zij een n-zijdige regelmatige vorm $A_1A_2...A_n$ en ene punt B in de vorm. Loodlijnen van B op ene zijde A_iA_{i+1} belandt op punt D_i voor alle i. Bewijs dat $BD_1 + BD_2 + ... + BD_n$ constant blijft voor waar je ook B plaatst.

Bij deze versimpelde opgave begon ik zelf met een oplossing waarbij overstaande zijden aan elkaar gekoppeld worden. Want als je een regelmatige n-hoek voorstelt waarbij n een even getal is, zal $BD_1 + ... + BD_n$ constant blijven omdat $BD_p + BD_q$ waarbij A_pA_{p+1} en A_qA_{q+1} overstaande zijden zijn, zal constant blijven, omdat $BD_p + BD_q$ dan altijd de breedte van de gehele n-hoek zal zijn, wat niet uitmaakt voor alle B. Maar toen botste ik na een tijdje tegen het feit dat deze methode niet te generaliseren is tot oneven n.

Daarna had ik geprobeerd een invariantie te bewijzen. Ik stelde punt B als het middelpunt van de n-hoek. $BD_1 + BD_2 + ... + BD_n$ is dan makkelijk te berekenen. Vervolgens probeerde ik om te bewijzen dat als punt B in een willekeurige richting beweegt, die som dan niet veranderde. Dit was te doen met sinus en cosinus bij $n = 3$. Ik had gehoopt om daarna met inductie voor alle n het te kunnen bewijzen maar ik wist niet genoeg over trigonometrie om dat te kunnen doen.

Om tenslotte op het idee te komen oppervlaktes erbij te pakken bij stap 2 vereist Einsteins inzicht; het is moeilijk te bedenken hoe je zelf op zo'n idee had kunnen komen, maar een start was om te proberen de som bij de vervlakte opgave ($BD_1 + ... + BD_n$) als geheel te bekijken in plaats van hoe we hiervoor slechts per punt of zijvlak bekeken. Maar goed. Om op dat idee te komen is echt inzicht nodig dat vooral door veel te oefenen te verkrijgen is. Maar nu dat je het eenmaal in deze opgave gezien hebt, kan je het de volgende keer ook nog toepassen. Zo werkt het ook vaak: als je een klasgenoot hebt die zo veel "inzicht" lijkt te hebben, ben je geneigd om jaloers te worden of om jezelf af te vragen hoe het kan dat hij of zij dat kon zien terwijl je niet eens dichtbij kan komen, maar misschien kwam het gewoon doordat die in het verleden zo'n soort opgave had tegengekomen.

THEMA: RUIMTEMEETKUNDE

(I) Vervlakken

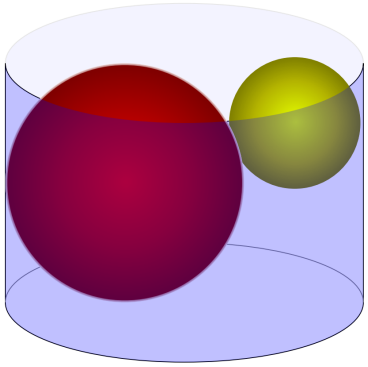
Er zijn twee vaakvoorkomende manieren om een ruimtemeetkundige opgave te "vervlakken". Daarmee bedoel ik dat je die opgave tot eentje van vlakke meetkunde verandert.

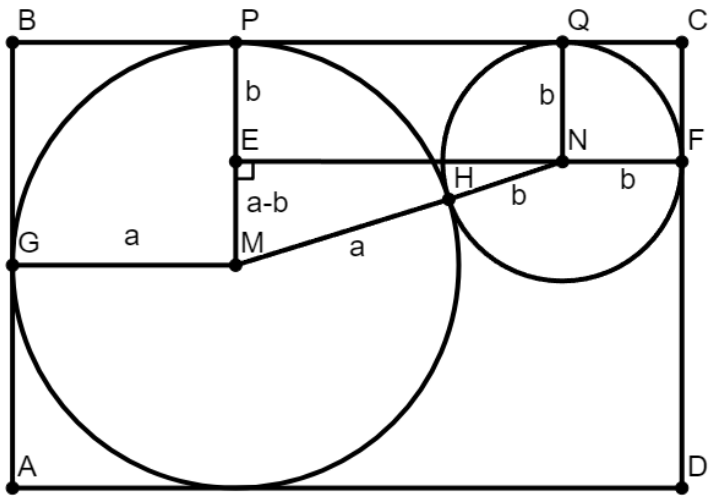
Ten eerste kan je een doorsnede bekijken en vervolgens de opgave die dan ontstaat op te lossen. Dit werkt alleen als er geen belangrijke gegevens buiten die doorsnede zijn. Het ruimtelijk figuur speelt hierbij dan slechts de rol van een verwarringsmechanisme.

Maar ook een mogelijkheid is om alle belangrijk gegevens tot één vlak te verwerken zodat je daarmee op die vlak de hele opgave kan proberen op te lossen. Dit kan behaald worden door middel van gelijkvormigheden bijvoorbeeld zijden uit te drukken in andere zijden of door trigonometrie. Dit is wat we bijvoorbeeld bij deze hoofdopgave (M7) moesten doen.

Maar hier nog een voorbeeld:

★★**Opgave M7.V1 (Vlaamse Wiskunde Olympiade Finale 2018-2019).** In een cilindervormig blik met diameter d zitten twee elkaar rakende ballen opgesloten met stralen a en b. Beide ballen raken het bovenvlak en de mantel van de cilinder. De grootste bal raakt ook het ondervlak. Toon aan dat $\sqrt{d} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.





Het is erg lastig om de situatie in te beelden. Hoewel kubussen en piramiden wel vaak te doen zijn, ballen en ballen die elkaar raken en óók nog die in een cilinder zitten is erg lastig door al die kromme vlakken. De truc bij deze opgave was om te kijken naar de zijaanzicht door de middelvlak van de cilinder. Zo zien we dat $AD = d$, $PQ = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2\sqrt{ab}$. We krijgen dan in één keer: $d = a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, dus $\sqrt{d} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$. Zie je hoe vervlakken de opgave zoveel makkelijker maakt qua inbeelden?

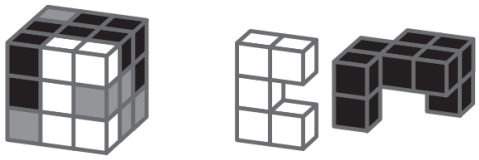
Misschien zeg je wel dat er niet gegarandeerd zo een zijaanzicht is waarbij de middelpunten van de ballen op dezelfde vlak zitten als een middelvlak van de cilinder. Het is niet gegarandeerd, geef ik wel toe als we de vraag zo oplezen. Waarschijnlijk was met het woord "opgesloten" dit geïmpliceerd, maar natuurlijk had iedereen wel daaroverheen kunnen lezen. Maar als we nou een zijaanzicht nemen zodat de middelpunten van de twee ballen in deze zijaanzicht voorkomen. Dan is $|AD| < |d|$ als de zijaanzicht niet door de middellijn van de cilinder heen gaat. Maar als we dezelfde redenering als hiervoor gebruiken, is dan $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{|AD|} < \sqrt{d}$. Dat kan niet want dan is de opgave fout want zij vroegen om te bewijzen dat $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{d}$. Dus, zo'n zijaanzicht die de middelpunten van de twee ballen bevat, bevat ook de middelvlak van de cilinder. Je kunt dus op deze manier vaak de opgave gebruiken om zulke twijfels over jouw uitwerking op te lossen.

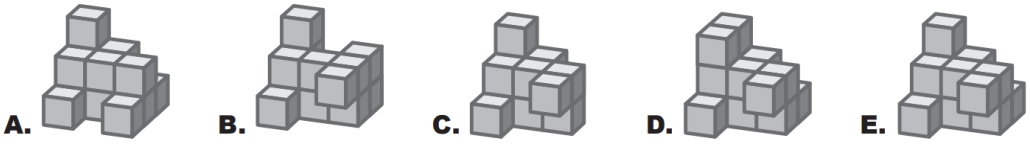
(II) Inbeelden

Als het vervlakken echt niet lukt, moet je proberen om de situatie in te beelden met behulp van schetsen. De oplossing vervolgens uitwerken kan je doen door woorden vooral te gebruiken wanneer het erg lastig is om het te schetsen. Formuleren maakt het inbeelden vaak veel makkelijker omdat de beredenering op papier gestructureerder zal zijn omdat alles inbeelden in je gedachten, hoe snel het ook kan zijn, kan ook verwarrend worden. Heel vaag misschien, maar het zal later nog uitgebreider uitgelegd worden.

Een voorbeeld van een opgave waar inbeelden echt cruciaal is, is bijvoorbeeld:

★**Opgave M7.V2 (W4Kangoeroe wizBRAIN 2021).** Een $3 \times 3 \times 3$ kubus is gemaakt van witte, grijze en zwarte $1 \times 1 \times 1$ kubusjes, zoals weergegeven in de linker figuur. In de rechter figuur zie je het witte gedeelte en het zwarte gedeelte van de kubus.
Welke van de volgende stukken toont het grijze gedeelte van de kubus?

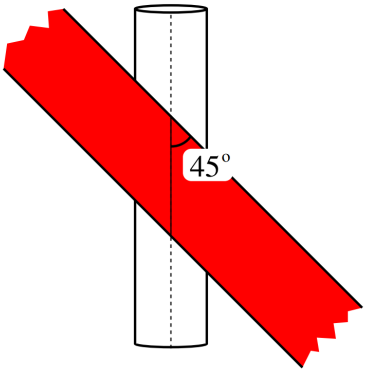




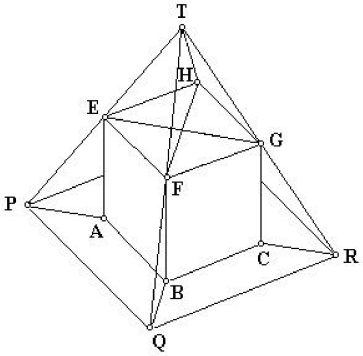
Bij de Kangoeroe hoef je niet per se te bewijzen dat wat je hebt gekozen als antwoord ook werkelijk het antwoord is, maar laten we het toch proberen te doen. Een bewijs moet de opgave verduidelijken; als jouw bewijs zegt dat je de kubussen gewoon moet inbeelden, heb je niet echt de oplossing bewezen. Zie je hoe de knelpunt als het ware het formuleren is van wat je inbeeldt en niet echt het inbeelden is? Want je bewijs moet namelijk de oplossing verklaren: je mag zo niet zomaar zeggen dat de lezer zich moet inbeelden. Dat mag alleen als je zeker bent dat dat inbeelden niet triviaal is, omdat het zo makkelijk is. Maar goed. Bij deze opgave is formuleren natuurlijk niet zo lastig want je kunt gewoon elke $1 \times 1 \times 1$ kubusje een naam geven door middel van letters of een

coördinatenstelsel en dan vervolgens per kubusje redeneren of die grijs of zwart hoort te zijn. Maar sommige van de onderstaande oefeningen kunnen erg lastig te formuleren zijn.

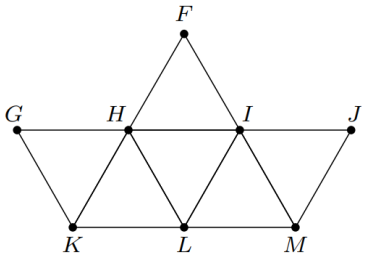
OEFENINGEN

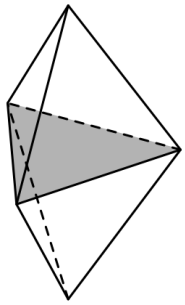


★**Opgave M7.1 (Tweede Ronde 2011).** We houden een rood lint onder een hoek van 45 graden over een cilindervormige witte stok (zie figuur). Het lint wordt dan strak om de stok gewikkeld (zonder plooien), zodat we een rode spiraal om de stok krijgen. Tussen de rode spiraal loopt een witte spiraal; dat is het deel van de stok dat niet door het lint wordt afgedekt. De straal van de stok is 2 cm.
Het blijkt dat de witte en de rode spiraal even breed zijn. Wat is de breedte van het lint?

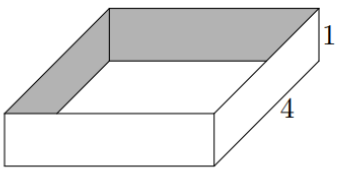


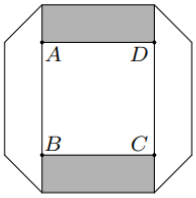
★**Opgave M7.2 (Eerste Ronde 2003).** In een regelmatige vierzijdige piramide $T\ PQRS$ waarvan alle ribben de lengte 1 hebben bevindt zich een kubus $ABCD\ EFGH$. Het grondvlak $ABCD$ van de kubus ligt in het grondvlak $PQRS$ van de piramide en de hoekpunten E, F, G en H liggen op de ribben PT, QT, RT en ST.
Bereken de lengte van de ribbe van de kubus.





★**Opgave M7.3 (Eerste Ronde 2012).** Hiernaast zie je een bouwplaat waarmee je een zogenaamde *dipiramide* kunt vouwen. Deze dipiramide zie je in het plaatje rechts.
Welke drie punten uit de bouwplaat worden na het vouwen hoekpunten van de grijze driehoek?
Toevoeging: Bewijs het ook!





★**Opgave M7.4 (Eerste Ronde 2014).** Een vierkante papieren ring heeft hoogte 1. De zijdes hebben lengte 4. De ring is afgebeeld in de linker figuur. Door hem op tafel plat te drukken krijgen we de rechter figuur. Hierin is vierhoek $ABCD$ een vierkant. Hoe lang is zijde AB?

★★**Opgave M7.5 (AIME II 2020).** Twee congruente rechte cirkelvormige kegels, elk met een basisstraal 3 en een hoogte 8, hebben symmetrieassen die elkaar loodrecht snijden op een punt in de kegels op een afstand 3 van de basis van elke kegel. Binnen beide kegels ligt een bol met straal r. Bereken de maximaal mogelijke waarde van r^2.

★★**Opgave M7.6 (Tweede Ronde 1998).** Een vierzijdige piramide $T\ ABCD$ heeft een vierkant met zijde 4 als grondvlak. Van de vier zijvlakken is minstens één zijvlak een gelijkzijdige driehoek en ook minstens één zijvlak een rechthoekige driehoek.
Welke waarde(n) kan de inhoud van de piramide aannemen? *Toevoeging: bewijs ook dat dat alle mogelijke waarden zijn!*

★★★**Opgave M7.7 (AIME I 2021).** Lijnstukken AB, AC, en AD zijn randen van een kubus en AG is een diagonaal door het midden van de kubus. Punt P voldoet aan $|BP| = 60\sqrt{10}$, $|CP| = 60\sqrt{5}$, $|DP| = 120\sqrt{2}$ en $|GP| = 36\sqrt{7}$. Vind $|AP|$. **EINDE LES**

Opgave M8.

Opgave

OPLOSSING

(1) Laten we de lengte van de zijde van vierkant i z_i noemen. Druk $(z_I)^2$, $(z_{II})^2$ en $(z_{III})^2$ uit in z_{IV}, z_V, z_{VI} met behulp van de cosinusregel. Tel de resulterende vergelijkingen op.
(2) We voegen een notatie in. $\angle A, B$ betekent de hoek met benen A en B die binnen de driehoek ingesloten door IV, V en VI ligt. Bewijs dat $(z_{IV})^2 + (z_V)^2 + (z_{VI})^2 = -2z_{IV}z_V \cdot cos(\angle IV, V) - 2z_{IV}z_{VI} \cdot cos(\angle IV, VI) - 2z_V z_{VI} \cdot cos(\angle V, VI)$. *Tip:* $-cos(\alpha) = cos(180 - \alpha)$.
(3) Het te bewijzen volgt direct eruit.

BESPREKING

De crux van deze opgave is het besluit om de cosinusregel te gebruiken. Wanneer je dat eenmaal hebt bedacht, valt de moeilijkheid van de opgave mee. Zeker wanneer je je realiseert dat de kwadraten van de cosinusregel ook de oppervlakten van hun respectieve vierkanten representeren. Dat de opgave over de oppervlakten van vierkanten gaat, wat de kwadraat is van de lengte van die vierkanten, moet jou signaleren dat je misschien een stelling kunnen gebruiken waarin kwadraten van zijdelengtes voorkomt. Je hebt dan maar twee mogelijke stellingen die je zou kunnen gebruiken, namelijk: de stelling van Pythagoras en de cosinusregel. En het feit dat geen enkele driehoek gegarandeerd een rechthoekige driehoek is, moet je aanmoedigen om te kiezen om de cosinusregel in plaats van Pythagoras toe te passen.

De volgende moeilijke stap die je moest zetten bij deze opgave was wanneer je een beetje moest doelen op wat je wilt bewijzen. Want zelfs wanneer je hebt bewezen dat $(z_I)^2 + (z_{II})^2 + (z_{III})^2 = 2(z_{IV})^2 + 2(z_V)^2 + 2(z_{VI})^2 - 2z_{IV}z_V \cdot cos(\angle IV, V) - 2z_{IV}z_{VI} \cdot cos(\angle IV, VI) - 2z_V z_{VI} \cdot cos(\angle V, VI)$. Maar omdat de doel van de opgave is om te bewijzen dat geldt: $(z_I)^2 + (z_{II})^2 + (z_{III})^2 = 3(z_{IV})^2 + 3(z_V)^2 + 3(z_{VI})^2$, kan je gaan doelen om te bewijzen dat misschien in dit geval geldt dat: $(z_{IV})^2 + (z_V)^2 + (z_{VI})^2 = -2z_{IV}z_V \cdot cos(\angle IV, V) - 2z_{IV}z_{VI} \cdot cos(\angle IV, VI) - 2z_V z_{VI} \cdot cos(\angle V, VI)$. De stap om in algebra te denken en daarop te doelen op een bepaalde stelling dat je zou willen bewijzen, is iets wat je vaak moet doen in trigonometrie, zoals ik in een paar voorbeelden zo zal laten zien. Want trigonometrie zet als het ware een meetkunde opgave in een opgave van algebra.

THEMA: TRIGONOMETRIE (OF GONIOMETRIE)

Gelukkig komt trigonometrie niet vaak voor in de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Ik zou er niet teveel tijd in stoppen als je slechts daarvoor aan het leren bent. Wanneer trigonometrie voorkomt in de NWO, is het slechts in kwestie van een toepassing van de cosinusregel of sinusregel. Maar het komt heel erg soms voor. Hiermee bedoel ik: in twee opgaven van 1991 tot en met 2022. Daarvan is ééntje deze hoofdopgave M8 en de andere een veel te moeilijke opgave waarvan ik niet weet waarom die in de NWO is gestopt. Maar goed, die heb ik tussen de oefeningen gestopt van deze thema.

Maar trigonometrie komt het vaakst voor als een "bashing" techniek bij hogere wiskundewedstrijden zoals de IMO. Een bashing techniek is een methode om een bepaalde soort opgave altijd te kunnen oplossen door een bepaalde stappenplan te volgen en erg vaak is het een onelegante oplossing waar je veel berekeningen moet maken. Zo kun je bijvoorbeeld alle meetkunde opgaven ooit oplossen met behulp van trigonometrie en een assenstelsel. Je kunt in een assenstelsel alle lijnen als lineaire vergelijkingen van de form $ax + by = c$ uitdrukken en cirkels met een vergelijking van de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. En vervolgens kun je zijdelengtes berekenen door de eindpunten van de zijden als snijpunten tussen twee lijnen/krommen te berekenen en met Pythagoras de lengte tussen die twee eindpunten berekenen. En hoeken kan je dan ook berekenen met trigonometrie. Maar het probleem is dat het erg veel algebra en dus vaak ook erg veel tijd zal kosten. Maar het is bijvoorbeeld mogelijk om een computerprogramma te maken die alle (elementaire) meetkunde opgaven kan oplossen, zoals het bewijzen dat $|AB| = |XY|$ of dat $\angle ABC = 30°$ enzovoort. Dat doen ze door alles in algebra vorm om te zetten en vervolgens alle gevraagde waarden te berekenen. Zo is GeoGebra een soort handmatige versie van zo'n computerprogramma, omdat je de diagram helemaal kunt tekenen en alle waarden kan berekenen, maar je handmatig moet kijken of de twee zijdelengtes ook werkelijk hetzelfde zijn, enzovoort.

In de NWO is "bashing" vaak onnodig omdat de opgaven nog best simpel zijn. "Bashing" zou teveel werk zijn als het ook op veel simpelere methoden kan. Daarom heb ik ook besloten om assenstelsels bijvoorbeeld te vermijden. Ik willen graag nog zeggen dat je trigonometrie alleen ten tijden van nood moet gebruiken in de NWO. Voor de NWO is trigonometrie vaak veel te technisch. Je moet eerder kijken naar gelijkvormigheid, Pythagoras, Thales, etc. voordat je overweegt om trigonometrie toe te passen. Maar als niks anders werkt, dan pas zullen we je aanraden elk van deze volgende strategieën langs te gaan. Er zijn wel uitzonderingen, zoals bij de opgave hierboven, kon je aan de kwadraten zien dat je iets met de cosinusregel moet doen. Maar in het algemeen, is trigonometrie een hulpmiddel ten tijden van nood.

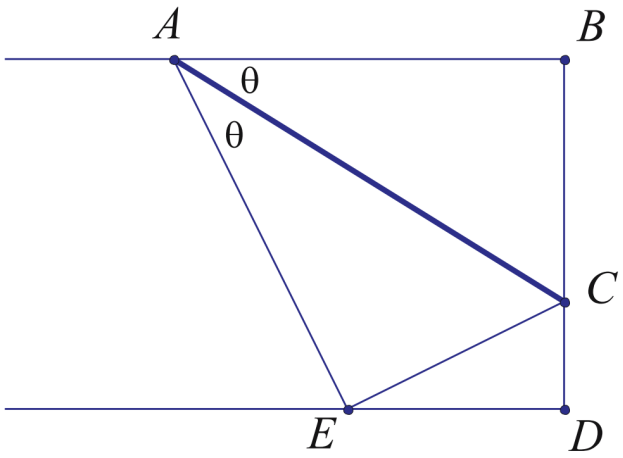
(I) Zoek naar (speciale) rechthoekige driehoeken.

Het is belangrijk om te weten dat de goniometrische functies erg handig zijn in rechthoekige driehoeken, want bij rechthoekige driehoeken kun je namelijk SOS/CAS/TOA toepassen. Wel iets is dat je bij rechthoekige driehoeken ook wel de Stelling van Pythagoras kunt gebruiken om zijdelengtes in een rechthoekige driehoek te berekenen. Maar als je verhoudingen wil vanwege hoeken of hoeken wil berekenen, moet je SOS/CAS/TOA gebruiken.

Om de rest uit te leggen zeg ik eerst dat er twee soorten tussenstappen zijn. Tussenstappen waar je iets moet bewijzen waaruit een slier van dominosteentjes vallen zodat het gevraagde volgt. Of tussenstappen waar je iets moet berekenen. Als je met trigonometrie een tussenstap wil afleggen waar je iets moet berekenen, moet je wel ervoor zorgen dat de hoek waarover je het doet een exacte antwoord biedt.

We gaan ervan uit dat je maar de waarden van sinus, cosinus en tangens weet die behandeld zijn op school. Zoals $sin(30°) = \frac{1}{2}$. Maar weet ook dat er zijn erg veel sinus-waarden zijn die je kunt berekenen, dus je kunt altijd meer berekenen zo nodig en zo mogelijk. Je kunt namelijk met de verdubbelingsformules en somformules veel waarden zelf berekenen. Van een sinus kun je de cosinus berekenen, want $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$. En daarmee kun je van een waarde $\sin(2A)$ ook de waarde van $\sin(A)$ berekenen. Stel we beginnen met $\sin(30) = \frac{1}{2}$. Dan kun je berekenen dat $\cos(30) = \sqrt{1-\sin^2(30)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. En daarmee kun je dan met de bekend-van-school verdubbelingsformule: $\cos(2A) = 1-\sin^2(A) \implies \sin(A) = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2A)} \implies \sin(15) = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(30)} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

★**Opgave M8.V1 (103 Trigonometry Problems).**
De figuur toont een lange rechthoekige strook papier, waarvan één hoek is omgevouwen langs AC om de tegenoverliggende rand te ontmoeten, waardoor een hoek wordt gecreëerd θ ($\angle CAB$ in de figuur). Aangezien de breedte van de strook w inch is, druk lengte van de vouw AC uit in termen van w en θ. (We nemen aan dat θ tussen 0° en 45° ligt, dus de werkelijke vouwsituatie komt overeen met de configuratie die wordt getoond in de figuur.)



Deze opgave laat zien hoe je met trigonometrie heel makkelijk bijna alle zijdelengtes kan berekenen. Of ten minste bijna alle zijdelengtes kan uitdrukken in een bepaalde ander zijdelengte en een paar van de goniometrische functies.

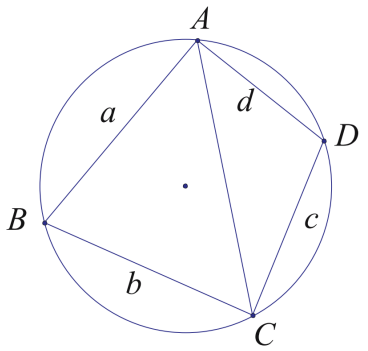
Deze opgave is niet erg lastig. Je moet gewoon SOS/CAS/TOA overal toepassen en dan kom je daar wel. Ik zal dus deze voorbeeld wat sneller doorlopen. Ik durf bijna wel al mijn bezit te wedden dat dit de eerste ding is wat jij schreef: $|AC| = \frac{|BC|}{\sin(\theta)} = \frac{|CE|}{\sin(\theta)}$. (1)
En een beetje hoeken jagen geeft je dat: $\angle ECD = 180 - \angle ECA - \angle ACB = 180 - 2(90-\theta) = 2\theta$.
En nu kunnen we ook dingen van ΔCDE uitdrukken: $|CE| = \frac{|CD|}{\cos(2\theta)}$. (2)
En vervolgens combineren van (1) en (2) geeft: $|AC| = \frac{|CD|}{\sin(\theta)\cos(2\theta)}$. (3)
Om $|CD|$ te verwijderen van (3): $|CD| = w - |BC| = w - |AC|\cdot\sin(\theta)$. (4)
En vervolgens (3) en (4) combineren geeft: $|AC| = \frac{w-|AC|\cdot\sin(\theta)}{\sin(\theta)\cos(2\theta)}$. $|AC|$ losmaken geeft: $|AC| = \frac{w}{\sin(\theta)(\cos(2\theta)+1)}$

(II) Cosinusregel

De cosinusregel: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot cos(\alpha)$. De cosinusregel is heel erg flexibel omdat je het in elke driehoek kan toepassen. Maar waar het tekort komt is wanneer de hoek α of de $\cos(\alpha)$ onbekend is. Ook waar je op moet letten bij de cosinusregel is dat die vaak veel algebra vereist: wortels en kwadraten kunnen je obstakel worden. Maar als je dus een driehoek hebt met een hoek waarvan je de cosinus weet, is het niet een slecht idee om de cosinusregel toe te passen.

Opgave M8.V2.
(a) Bewijs met de cosinusregel de formule van Brahmagupta voor de oppervlakte van een koordenvierhoek: $O(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ waar a, b, c, d de zijden van de koordenvierhoek zijn en s de semiperimeter is, dus $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.
(b) Bewijs ook met de cosinusregel de formule van Heron voor de oppervlakte van een driehoek: $O(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ waar a, b, c de zijden van de driehoek zijn en $s = \frac{a+b+c}{2}$ (alweer de semiperimeter).

Ten eerste de formule van Brahmagupta. Beginnend met een koordenvierhoek, kunnen we niet ergens de cosinusregel toepassen omdat wij daarvoor een driehoek nodig hebben. De meest rechttoe rechtaan manier om bij een koordenvierhoek een driehoek te maken is door de diagonaal te tekenen. Dat hebben we in de figuur rechts gedaan.



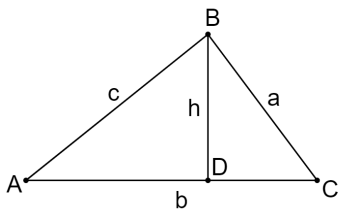
Merk op dat we een formule moeten bewijzen waarin alle zijden van de koordenvierhoek voorkomen. Dus eigenlijk, als het ons lukt om alle vier de zijden en de oppervlakte van de koordenvierhoek in één vergelijking te stoppen, hoop ik dan dat wij door te herleiden komen op de mooie symmetrische formule van Brahmagupta.

Dan lijkt het mij handig om de lengte van AC op twee manieren op te schrijven zodat we een vergelijking krijgen zonder $|AC|$, want $|AC|$ hoort uiteindelijk niet in de formule van Brahmagupta:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle B) = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(\angle D) \quad \textbf{(S1)}$$

En we weten dat $\angle B + \angle D = 180°$ omdat $ABCD$ een koordenvierhoek is. Dus, $\cos(\angle D) = \cos(180 - \angle B) = \cos(\angle B - 180) = -\cos(\angle B)$. En als we dat nou in (S1) stoppen, krijgen we:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\angle B) = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos(\angle B) \quad \textbf{(S2)}$$



We hebben dus een mooie vergelijking met alle vier van de zijden van de koordenvierhoek, maar de oppervlakte daarvan is nergens te vinden. We kunnen de oppervlakte van de koordenvierhoek vinden door die van de twee driehoeken bij elkaar op te tellen. $O(ABCD) = O(ABC) + O(ADC)$. We moeten nu dus $O(ABC)$ en $O(ADC)$ uitdrukken in een vergelijking. Maar hoewel we geneigd zijn om de formule $\frac{1}{2} \cdot base \cdot hoogte$ te gebruiken, kunnen we dat niet beter niet doen, omdat we anders nog twee hoogtes hebben die allebei moeilijk weg te halen zijn. We willen ons vermijden om nog meer complicaties aan de vergelijking toe te voegen. Als we een driehoek ABC hebben, kunnen we met symmetrie de hoogte uitdrukken als $h = \sin(\angle A) \cdot c$. Dus, $O(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\angle A)$. Onze volgende obstakel is de aanwezigheid van cos en sin. Dat willen we graag nog later weghalen.

Als we nu zo'n vergelijking voor allebei de driehoeken maken, en dan ze opsommen, krijgen we het volgende:
$O(\Delta ABC) = a \cdot b \cdot \sin(\angle B)$
$O(\Delta ACD) = c \cdot d \cdot \sin(\angle D) = c \cdot d \cdot \sin(180 - \angle B) = c \cdot d \cdot \sin(\angle B)$

$$O(ABCD) = O(\Delta ABC) + O(\Delta ACD) = \sin(\angle B)(ab + cd) \quad \textbf{(S3)}$$

Ik zie dat de vergelijking van de oppervlakte (S3) de sinus functie bevat. Dit is nog erg irritant omdat we eigenlijk niet een trigonometrische functie willen hebben. Maar van vergelijking (S2), kan ik de cosinus vrijmaken:

$$\cos(\angle B) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd} \quad \textbf{(S4)}$$

Het is dus niet heel apart om te denken dat ik (S4) in (S3) kan substituëren als ik eenmaal de linkerkant van (S4) verander in een sinus. En je kunt daarvoor de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ gebruiken. Als we hier dan de $\sin(A)$ vrijmaken, zullen we $\sin(A) = \sqrt{1 - \cos^2(A)}$ krijgen. En dus, krijgen we: $\sin(\angle B) = \sqrt{1 - (\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd})^2}$.
En als we deze draak van een vergelijking substituëren in (S3), krijgen we:

$O(ABCD) = (ab + cd) \cdot \sqrt{1 - (\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd})^2}$
$= (ab + cd) \cdot \sqrt{(1 - \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd})(1 + \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd})}$
$= (ab + cd) \cdot \sqrt{\frac{2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2}{2ab+2cd} \cdot \frac{2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}}$
$= (ab + cd) \cdot \sqrt{\frac{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}{(2ab+2cd)^2}}$

$= (ab+cd)\cdot\sqrt{\frac{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}{4(ab+cd)^2}}$
$= (ab+cd)\cdot\frac{\sqrt{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}}{2(ab+cd)}$
$= \frac{\sqrt{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}}{2}$
Je kunt nu eigenlijk beargumenteren dat we klaar zijn, als we alles goed hebben gedaan. Want, we hebben een formule voor de oppervlakte van een koordenvierhoek gevonden dat de oppervlakte uitdrukt in precies dezelfde variabelen als de formule van Brahmagupta. Wat we nog moeten doen is niet meer iets toevoegen of de formule wat versimpelen door variabelen weg te laten vallen, wij hoeven nog de formule te herleiden tot de mooie symmetrische vorm van Brahmagupta.

Het is erg lastig om deze formule te herleiden als we niet de uiteindelijke formule zouden hebben gekregen bij de opgave. Want wie had kunnen bedenken dat zo'n draak van een formule tot zo'n mooie vorm te ontbinden was? Want ten eerste moeten wij op de een of andere manier de semiperimeter (s) erbij betrekken. Hoe zouden wij dat kunnen doen?

En dan komen wij op mijn volgende punt: **dat het makkelijker is om een vergelijking rommeliger te maken dan om die mooier te maken.**

Laten we dus $O(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ dan maar rommeliger maken door het in dit geval uit te werken.
$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$
$= \sqrt{\frac{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{2}}$
$= \sqrt{\frac{(ab+bc+bd-b^2+ac+c^2+cd-bc+ad+cd+d^2-bd-a^2-ac-ad+ab)(a^2+ab+ac-ad+ab+b^2+bc-bd+ad+bd+cd-d^2-ac-bc-c^2+cd)}{2}}$
$= \sqrt{\frac{(c^2+d^2-b^2-a^2+2ab+2cd)(a^2+b^2-c^2-d^2+2ab+2cd)}{2}}$
Zo zien we dan dat we nu hetzelfde krijgen, dus we hoeven nu nog de hele beredenering om te keren en daarmee voltooien we het bewijs voor de formule van Brahmagupta. Zie je hoeveel lastiger het zou zijn als je de ontbinding zelf had moeten vinden?

Zoals ik eerder heb gezegd, in de bespreking van deze opgave M8, heb ik moeten doelen op het niveau van algebra. De opgave schakelt om tot een opgave van algebra van een opgave van meetkunde bij invoering van trigonometrie.

De formule van Heron is eigenlijk slechts een speciaal geval van Brahmagupta. (Zie je waarom?) Want een driehoek is altijd cyclisch, dus het is eigenlijk de formule van Brahmagupta maar met $d = 0$ omdat twee punten van de koordenvierhoek op elkaar zitten. Zie je hoe dat zit?

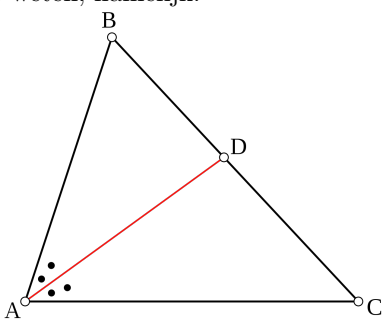
Heb je ooit over nagedacht hoe iemand die zo lang geleden leefde als Brahmagupta en Heron op zo'n mooie maar zeer complexe formule op konden komen? Natuurlijk was dit niet het originele bewijs van Brahmagupta en Heron. Zij hadden geen trigonometrie tot hun beschikking. Zie deze video die 4 methoden, onder andere de originele van Heron, doorloopt voor het bewijs van de formule van Heron: https://www.youtube.com/watch?v=LyI2BiyftvY

(III) Sinusregel

De sinusregel is erg handig. Je kunt daarmee allerlei hoeken en zijden berekenen. Wat het ook erg handig maakt is dat je daarmee ook dingen kunt bewijzen. Maar ik denk dat ik de nut van sinusregel het best door middel van een voorbeeldopgave kan laten zien.

Deze opgave maakt gebruik van een stelling dat je niet voor de NWO hoeft te weten, namelijk:

Bissectricestelling
Zij ΔABC met bissectrice AD van $\angle A$ met D op BC.
Dan geldt: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$.
Bewijs dit eens. Het is niet lastig.



En hier het voorbeeld (die we je aanraden om voor een halfuurtje tot een uur te proberen):
★★★**Opgave M8.V3 (BMO2 2017).** Beschouw een koordenvierhoek $ABCD$. De diagonalen AC en BD ontmoeten elkaar in P, en de lijnen AD en BC ontmoeten elkaar in Q. De bissectrice van hoek $\angle BQA$ ontmoet AC in R en de bissectrice van hoek $\angle APD$ ontmoet AD bij S. Bewijs dat RS evenwijdig is aan CD.

Ten eerste. Wat is de enerlaatste stap? Wat moeten we bewijzen waaruit het gevraagde, in dit geval dat RS evenwijdig is aan CD, direct geïmpliceerd wordt? Misschien... het bewijzen dat $\Delta ARS \sim \Delta ACD$?

Nu dat wij een doel hebben, kunnen we kijken hoe wij die doel gaan bereiken. Er zijn daar twee manieren voor. Merk eerst op dat $\angle RAS = \angle CAD$. Dus, als we de gelijkvormigheid willen bewijzen, kunnen we dat doen door de gelijkheid van hoeken te bewijzen ($\angle SRA = \angle DCA$ of $\angle RSA = \angle CDA$) of door de gelijkheid van de ratio van zijdelengtes te bewijzen (bijvoorbeeld $\frac{|AR|}{|AC|} = \frac{|AS|}{|AD|}$).

Als je nou de gelijkvormigheid met hoeken probeert te bewijzen, zal het niet lukken. Probeer dit zelf! Dus, laten we ons proberen om de ratio van zijdelengtes te bewijzen. Uit de bissectricestelling volgt in één keer dat $\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AR|}{|CR|}$ en $\frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|AS|}{|DS|}$.

Als we kijken naar wat we wilden bewijzen als enerlaatste stap, dat $\Delta ARS \sim \Delta ACD$, zien we dat als we hebben bewezen dat $\frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|AS|}{|DS|}$, dat het eruit volgt. En $\frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|AS|}{|DS|}$ kan alleen als $\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AP|}{|DP|}$. Dat we willen bewijzen dat de verhouding tussen twee zijden gelijk zijn, lijkt erop dat we een gelijkvormigheid moeten bewijzen. Als nou $\Delta ACQ \sim \Delta ADP$, zou dat meteen volgen.

Maar als we deze gelijkvormigheid zouden willen proberen te bewijzen, komen we tegen het feit aan dat $\angle ACQ = 180 - \angle ADP$. En dus, $\angle ACQ \neq \angle ADP$, omdat $\angle ACQ$ niet voor alle mogelijke diagrammen 90° is. Dus, $\Delta ACQ \not\sim \Delta ADP$.

Dus we hebben twee driehoeken die een bepaalde verhouding van zijden moet hebben, maar waarvan eentje een hoek (α) heeft en een ander een hoek ($180^\circ - \alpha$). Dus, deze twee driehoeken zijn als het ware "pseudo-gelijkvormig" (dat is niet een officiële term). Dat twee driehoeken zo'n eigenschap heeft: om een zijdelengte verhouding te hebben dat alleen door gelijkvormigheid kan bestaan en dat eentje een hoek α heeft en de ander een hoek $180 - \alpha$ heeft, moet je vanaf nu de signaal geven om de sinusregel te gebruiken. Want $\sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha)$! En dus, die verhouding die alleen door gelijkvormigheid kan ontstaan toch kan ontstaan! Denk goed na over wat ik heb geschreven... begrijp je het echt?

Als we de sinusregel nu toepassen, krijgen we in ΔADP dat $\frac{|AP|}{\sin(\angle ADP)} = \frac{|DP|}{\sin(\angle DAP)}$ en in ΔACQ dat $\frac{|CQ}{\sin(\angle QAC)} = \frac{|AQ|}{\sin(\angle ACQ)}$. En omdat $\angle ACQ = 180 - \angle ADP$ en $\angle DAP = \angle QAC$, hebben we dat $\frac{|AP|}{\sin(\angle ADP)} = \frac{|DP|}{\sin(\angle DAP)}$ en $\frac{|CQ|}{\sin(\angle DAP)} = \frac{|AQ|}{\sin(180 - \angle ADP)} = \frac{|AQ|}{\sin(\angle ADP)}$. Dus, we hebben dat uiteindelijk geldt: $\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AP|}{|DP|}$. Waaruit volgt dat $\frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|AS|}{|DS|}$. Waaruit volgt dat $\Delta ARS \sim \Delta ACD$. Waaruit volgt dat $RS // CD$ vanwege F-hoeken.

Ik wil graag zeggen dat deze bespreking erg gebaseerd is op de blogpost van Dominic Yeo.
https://eventuallyalmosteverywhere.wordpress.com/2017/01/27/bmo2-2017/

Deze blog van Dominic Yeo is erg handig als je wilt oefenen door BMO opgaven te maken, want veel van de BMOs hebben geen antwoorden op de BMO website staan. Dominic Yeo bespreekt de opgaven ook heel erg goed, dus hij is echt een aanrader.

Je kunt erg goed worden in trigonometrie als je veel formules kent. Want vaak is trigonometrie in het herkennen van een bepaalde formule in een meetkundige figuur. Dus, we raden je aan om veel formules te leren voor trigonometrie. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Trigonometric_identities

Ik zal er niet bij de oefeningen ervan uit gaan dat je al die formules kent, maar ik ga er wel van uit dat je bij de oefeningen, wanneer je echt vastloop, die pagina van AoPS of een ander soortgelijke pagina gebruikt als een soort formulekaart.

Ik raad trouwens AoPS erg aan. Er is een grote actieve forum vol met opgaven en oplossingen. Daar kun je vaak ook meerdere oplossingen vinden. Zo kun je zien hoe je een meetkunde opgave met gelijkvormigheden en hulplijnen, of met trigonometrie, of soms zelfs met complexe getallen kunt oplossen. Je kunt op AoPS erg veel leren.

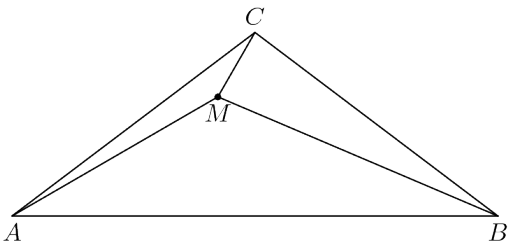
Als je verder geïnteresseerd bent in trigonometrie: 103 Trigonometry Problems is een goede boek door de bekende Zuming Feng en Titu Andreescu. Deze twee heren hebben allebei en samen ook veel goede wiskunde boeken geschreven. Ik raad hun werk echt aan.

OEFENINGEN

Een probleem bij het uitzoeken van trigonometrische opgaven is dat sommige opgaven heel erg algebraïsch zijn. Als in, het gaat alleen over de functies $\sin(x)$ bijvoorbeeld OF het was erg technisch, als in het maakt gebruik van allerlei trigonometrische identiteiten en formules die ik niet wil behandelen. Ik zal terugkomen op de trigonometrische maar te algebraïsche opgaven in een latere tijd.

★**Opgave M8.1 (103 Trigonometry Problems).** In ΔABC, $\frac{BC}{AC} = 2 + \sqrt{3}$ en $\angle C = 60°$. Bereken hoeken A en B.

★★**Opgave M8.2 (AIME I 2003).** Driehoek ABC is gelijkbenig met $AC = BC$ en $\angle ACB = 106°$. Punt M ligt binnen de driehoek zodat $\angle MAC = 7°$ en $\angle MCA = 23°$. Bereken het aantal graden in $\angle CMB$.



★★**Opgave M8.3 (AHSME 1963).** In ΔABC, zijde $a = \sqrt{3}$, zijde $b = \sqrt{3}$, en zijde $c > 3$. Laat x het grootste getal zijn zodat de grootte, in graden, van de hoek tegenover zijde c groter is dan x. Bereken x.

★★**Opgave M8.4 (AIME 1995).** Driehoek ABC is gelijkbenig, met $AB = AC$ en hoogte $AM = 11$. Stel dat er een punt D is op AM met $AD = 10$ en $\angle BDC = 3\angle BAC$. Bereken de omtrek van ΔABC en schrijf het tot de vorm $a + \sqrt{b}$, waarbij a en b gehele getallen zijn.

★★**Opgave M8.5 (Pathfinder for Olympiad).** Zij ΔABC een gelijkbenige rechthoekige driehoek is met $|AC| = |BC|$ en $\angle ACB = 90$. D is een punt op AC en E ligt op de extensie van BD zodat $AE \perp BE$. Als $AE = \frac{1}{2}BD$, bewijs dan dat BD $\angle ABC$ doorsnijdt.

(a) Bewijs het met trigonometrie.

(b) Bewijs het zonder trigonometrie.

★★**Opgave M8.6.** Zij een gelijkzijdige driehoek ABC met een punt P in die driehoek. We tekenen loodlijnen van punt P tot de zijden AB, AC en BC met voeten respectievelijk D, E en F. Bewijs dat $|PD| + |PE| + |PF|$ constant is voor waar je ook P neerzet binnen ΔABC.

★★★**Opgave M8.7 (103 Trigonometry Problems).**

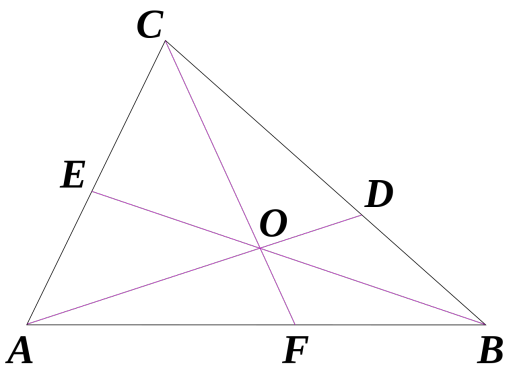
(a) Zij ΔABC. Bewijs de stelling van Ceva: cevianen AD, BE en CF zijn concurrent als geldt:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

(b) Bewijs de goniometrische versie van de stelling van Ceva. Die zegt dat cevianen AD, BE en CF concurrent zijn als geldt:

$$\frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle CAD)} \cdot \frac{\sin(\angle ACF)}{\sin(\angle BCF)} \cdot \frac{\sin(\angle CBE)}{\sin(\angle ABE)} = 1$$

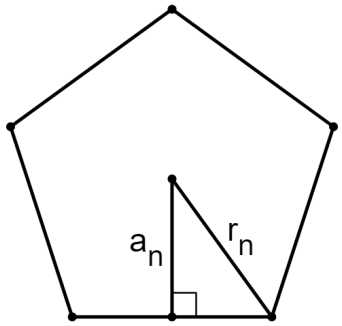
(c) Zij ΔABC met $\angle BAC = 40°$ en $\angle ABC = 60°$. Zij punten D en E op zijden, in dezelfde volgorde, AC en AB zodat $\angle CBD = 40°$ en $\angle BCE = 70°$. Lijnstukken BD en CE snijden elkaar in F. Bewijs dat $AF \perp BC$.



★★★**Opgave M8.8 (AIME II 2008).** In driehoek ABC, $AB = AC = 100$, en $BC = 56$. Cirkel P heeft straal 16 en raakt aan AC en BC. Cirkel Q raakt P extern en raakt $\overline{AB}$ en $\overline{BC}$. Geen enkel punt van cirkel Q ligt buiten ΔABC. Wat is de straal van cirkel Q?

Een uitzonderlijk lastige opgave voor de liefhebber. Let op! Met uitzonderlijk, bedoel ik écht uitzonderlijk. Alstublieft: (z.o.z.)

★★★**Opgave M8.9 (Tweede Ronde 1992).**
We bekijken regelmatige n-hoeken met een vaste omtrek. De afstand van het middelpunt van zo'n n-hoek tot een hoekpunt noemen we r_n en de afstand van het middelpunt tot een zijde a_n. Zie de tekening met $n = 5$.
(a) Bereken a_4, r_4, a_8, r_8.
(b) Bedenk een passende definitie voor a_2 en r_2.
(c) Bewijs: $a_{2n} = \frac{1}{2}(a_n + r_n)$ en $r_{2n} = \sqrt{a_{2n} r_n}$
Je moet weten dat er andere functies zijn buiten de normale $\sin, \cos en \tan$.
Ik ga dit niet uitgebreid behandelen, maar ik zal een paar opgaven hier tonen voor wie zich hierin interesseert.
gebruik geen trigonometrie bij andere opgaven behalve bij de toets, als je dat leuk vindt.



De rij $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ wordt nu als volgt gedefinieerd:

$$u_0 = 0, u_1 = 1$$

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_{n-2} + u_{n-1}), & \text{als n even is} \\ \sqrt{u_{n-2} u_{n-1}}, & \text{als n oneven is} \end{cases}$$

(d) Bepaal $\lim_{n \to \infty} u_n$.
Hint
<u>EINDE LES</u>

Opgave M9.

Opgave

OPLOSSING
(1) Teken in één diagram een paar mogelijke posities van P en de bijbehorende positie van M en vermoed dat de verzameling punten een lijnstuk parallel aan AB is.
(2) Teken punt S, het snijpunt van het verlengde van AQ en BR. Bewijs dat M het midden is van SP.
(3) Maak de bewijs af. Formuleer het correct.

BESPREKING
De verzameling punten is natuurlijk de lijnstuk CD waarbij C en D respectievelijk de middens zijn van AS en BS. Het is niet een zeer lastige verzameling om te vinden. Maar we zouden nooit voort kunnen hebben gemaakt als we de beweging van P niet hadden verbeeld of getekend. Dat is ook de crux van deze opgave: het stellen van een vermoeden van de verzameling punten van M. Maar de opgave valt uit elkaar nadat je een goede vermoeden had opgebouwd omdat de situatie eigenlijk best meevalt pratend over geodriehoeken die erg makkelijk zijn om mee te werken.

Wat misschien wel veel lastig hadden gevonden was hoe je kon bewijzen dat die lijnstuk ook echt de verzameling punten van M is. Maar waar het op neer komt, is dat je bewijst dat de afstand van M tot AB constant blijft, want dat is hoe je namelijk kunt bewijzen dat de verzameling punten van M een parallele lijn is aan AB, want dat is precies de definitie van een stel parallele lijnen: dat ze overal even ver van elkaar zijn. En waar die lijnstuk dan eindigt zou je hebben kunnen bewezen door te kijken naar waar M het verst naar links is en waar M het verst naar rechts is, en dan te zeggen dat M niet verder naar links of rechts komt, anders kan iets niet, zoals dat P dan buiten AB is bijvoorbeeld.

THEMA: LOCUS (OF DE MEETKUNDE PLAATS)

De locus of de meetkundige plaats is een meetkundige figuur die wordt gevormd door een verzameling punten die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Zo is de cirkel bijvoorbeeld de meetkundige plaats van alle punten die op een vaste afstand (radius) staan tot een vaste punt (middelpunt). Maar bij locus opgaven hebben we vaker te maken met de locus van één punt P die beweegt over een traject: dus het gaat vaker niet om een verzameling punten, maar de verzameling mogelijke punten P. Die punt P beweegt dan wanneer een punt Q beweegt over een bekende locus vermeld in de opgave. Punt P zou je een gevolg kunnen noemen van de oorzaak, wat de beweging van punt Q is. Dit is allemaal erg theoretisch, maar ik zal er op terugkomen bij de voorbeelden.

(I) WAT IS DE ENERLAATSTE STAP?

Vragen omtrent een locus zijn vaak niet zo anders dan een "normale" of synthetische meetkunde opgave. Alleen moet je bij een locus opgave wat meer werk verrichten om een enerlaatste stap te bedenken, terwijl het ook nog vaker nodig is om de enerlaatste stap te bedenken in locus opgaven dan in synthetische meetkunde opgaven. Maar na het bedenken van een enerlaatste stap, verandert de locus opgave in een synthetische meetkunde opgave.

Het gaat altijd bij een locus opgave om een bepaalde punt P die beweegt door een bepaalde oorzaak. Om een enerlaatste stap te formuleren, zou je eerst altijd een nette diagram moeten opstellen met allerlei punten waar P zou kunnen zijn. De doel is om genoeg van de mogelijke posities van punt P op te stellen zodat je een bepaald vorm erin kan zien. Bij opgaven waar de vraag is: "Wat is de locus van punt P?", is dit zeker handig omdat je dan een idee krijg over wat je zou moeten doen voor de tweede stap. Maar bij opgaven waar de vraag is: "Bewijs dat de locus van punt P een lijn is," is dit ook erg handig om te doen zodat je een beter idee krijg over waar de lijn is.

De tweede stap om een enerlaatste stap te bedenken is om een bepaalde aanvalshoek te kiezen. Je moet kijken welke stelling of definitie je zou kunnen gebruiken om te bewijzen dat de locus een bepaalde figuur is. Bijvoorbeeld, om te bewijzen dat de locus van punt P een cirkel is, zou je kunnen kijken of punt P aan Thales voldoet, als in, het vormt altijd een rechte hoek met twee vaste punten, waardoor het altijd op een cirkel is, en dus de locus een cirkel is.

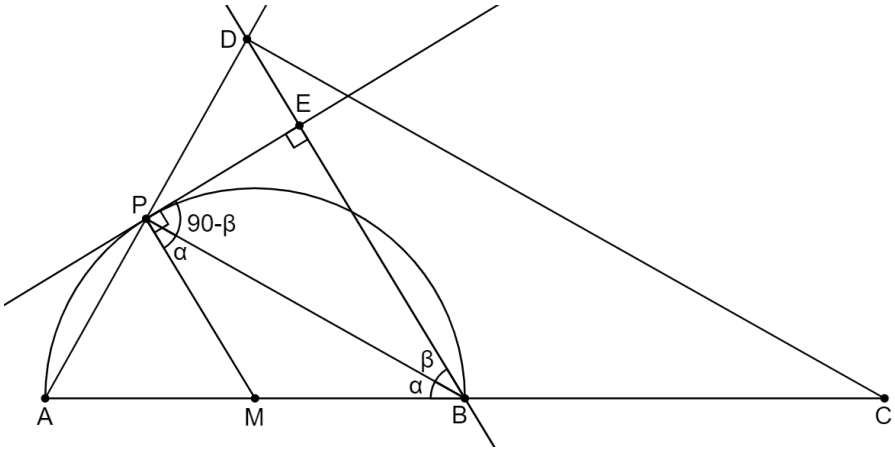
Maar dit is genoeg theorie! Laten we kijken naar een voorbeeld. Probeer het voor een half uurtje.

★★**Opgave M9.V1 (NMTC 2022).** AB is de diameter van een halve cirkel. P is een variabel punt op de halve cirkel. De loodlijn van B aan de raaklijn bij P en lijn AP ontmoeten elkaar bij D. Wat is de locus van D?

Ik heb in GeoGebra een opstelling gemaakt: https://www.geogebra.org/calculator/amvzya4w
Beweeg punt P in de opstelling.

Ten eerste moeten we kijken naar wat de locus van D zou kunnen zijn. Na de opstelling voor 4-5 mogelijke plaatsen van P te tekenen met geodriehoek en passer, was het mij duidelijk dat de locus een halve cirkel was met een twee keer zo grote diameter als AB.

Vervolgens moeten wij ons afvragen: hoe gaan we dat bewijzen? Wat is de enerlaatste stap? Het leek mij handig door de aanwezigheid van rechte hoeken om met Thales de locus te bewijzen. Zo kan ik een rechte hoek maken door de middelpunt van de halve cirkel te tekenen en er was al een rechte hoek gegeven omdat door B een loodlijn volgens de opgave getekend moet worden op de raaklijn door P.



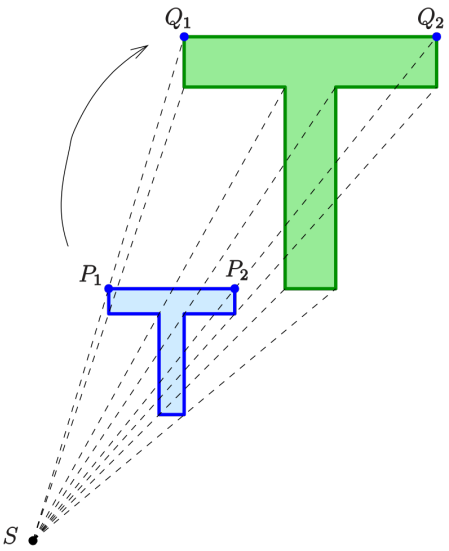
En omdat ik heb vermoed dat de locus van punt D een halve cirkel is twee keer zo groot als die met diameter AB, kan ik proberen om dit te bewijzen met een hulppunt C die ik zo contrueer zodat $|AB| = |BC|$. Nu is het doel om te bewijzen dat $\angle ADC = 90°$. Dat wilde ik doen door te bewijzen dat $\Delta APB \sim \Delta ADC$. En ik hoopte dat te doen met zhz, omdat ik al wist dat $\angle BAP = \angle CAD$ (dezelfde hoek) en $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ (hebben we zo geconstrueerd). Dus, het doel nu is om te bewijzen dat geldt: $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{2}$, oftewel $|AP| = |DP|$. Ik ging meteen aan de slag met hoeken jagen omdat dat altijd handig is om te doen aan het begin van een zoektocht van een bewijs om te kijken of er sporen te vinden zijn van een bewijs. En het bewijs dat $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{2}$ volgde er direct uit. (Zie het bovenstaand figuur.)

Om het zeer kort samen te vatten: $\alpha = \beta$ dus $|AP| = |DP|$ omdat ΔABD dan een gelijkbenige driehoek is met tophoek B omdat $\angle APB = 90°$ en dus in ΔABD de bissectrice en de loodlijn van punt B samenvallen. dus $\Delta APB \sim \Delta ADC$ in verhouding $1 : 2$ dus $\angle ADC = 90°$ dus AC is een middellijn van een twee keer zo grote halve cirkel vanwege Thales. Verdere details als hoezo D nooit onder AB komt, zijn triviaal. Maar zie je hoe de grotere halve cirkel een vergroting is van de halve cirkel met middellijn AB ten opzichte van het punt A? De halve cirkel met middellijn AC wordt ook wel de homothetie genoemd van de halve cirkel met middellijn AB.

Ik had beloofd om terug te komen op het idee van een oorzaak en gevolg. In dit voorbeeld, is de oorzaak de beweging van punt P over de bekende locus, de halve cirkel met middellijn AB. En het gevolg is de beweging van punt D. Zie je hoe je voor een locus altijd minstens twee bewegende punten nodig hebt? Dit is belangrijk om te weten, omdat het vaak zo is dat de locus van de oorzaak hetzelfde is als de locus van het gevolg, maar misschien wat vergroot of getransleerd.

(II) HOMOTHETIEËN IN HET KORT

Verreweg de handigste iets om te weten bij locus opgaven is de homothetie. Het komt namelijk erg vaak voor. Zo is de locus van Opgave M1.V1 (het voorbeeld bij de vorige strategie) een homothetie.



Maar wat is nou een homothetie? Het is een vergroting uit één punt van een bepaalde vorm. De originele vorm noemen we het object en de vergrote vorm is het beeld. Het object wordt als het ware geprojecteerd tot het beeld. Laten dit voorbeeld rechts nemen waarbij een T-vorm vergroot wordt door punt S. En dat vergroting wordt gedaan met een bepaalde factor, die factor wordt vaak met de letter k of λ gegeven. In dit geval spreken we van $k = 2$. We spreken bij het voorbeeld rechts dus van een homothetie ten opzichte van S met factor 2. S wordt ook wel het centrum van de homothetie genoemd. Een homothetie is kortom een speciale vorm van een vergroting wat op zijn beurt een speciale vorm van een transformatie is. Bij een homothetie wordt een object geprojecteerd of getransformeerd. Dat zal alles zijn qua notatie en taalgebruik.

Wat leuk is om te weten, is dat k ook een negatief getal kan zijn. Hoe zal het beeld dan eruit zien?

Wat belangrijk is om te weten bij een homothetie, zeker voor toepassing op locus opgaven, is dat het object en het beeld gelijkvormig zijn waarbij overeenkomende zijden parallel blijven. Zo is in het voorbeeld $P_1P_2 // Q_1Q_2$. En verder is het zo dat bij een homothetie de verhouding tussen de afstanden van het centrum tot het object en het centrum tot het beeld voor alle punten van de figuur constant blijft. Zo geldt er in het voorbeeld dat $\frac{SQ_1}{SP_1} = \frac{SQ_2}{SP_2} = k$. Dus, om een homothetie te bewijzen, moet je dan ook bewijzen dat de verhoudingen constant blijven voor alle punten van de figuur. Dit is allemaal heel erg leuk, maar hoe zou je homothetieën kunnen toepassen in locus opgaven?

Stel je wilt de locus van een punt P bewijzen. En stel dat je vermoedt dat de locus van P een cirkel moet zijn. Maar het is lastig om dat te bewijzen, omdat punt P niet dichtbij de oorzaak ligt van zijn beweging. Daarmee bedoel ik dat de oorzaak andere punten laat bewegen die dan op hun beurt andere punten laten bewegen voordat de beweging uiteindelijk bij P terechtkomt. Misschien zou je kunnen zien dat de locus van P een homothetie is van (ik zeg maar wat) punt Q. En punt Q is zeer makkelijk om te bewijzen dat die een cirkel vormt. Dan is het handig om juist voor punt Q de locus te bewijzen en dan te zeggen dat de locus van punt P precies de homothetie is van punt Q met factor λ. Wel belangrijk dus is om die λ goed te weten. Dit allemaal is heel vaag, dus laten we een voorbeeld bekijken.

★★★**Opgave M9.V2 (UNMO 1992).** Zij een punt A op een cirkel en een punt D binnen dezelfde cirkel. Voor elke driehoek ABC, waarvan de hoekpunten B en C op deze cirkel liggen, en de zijde BC door het punt D gaat, construeren we het snijpunt M van zijn medianen. Vind de meetkundige plaats van al dergelijke punten M.

We hebben hier een GeoGebra gemaakt (https://www.geogebra.org/calculator/a86wzast), omdat dat soms wel erg handig kan zijn. Ik zeg altijd en ik zeg het weer: probeer meetkunde opgaven eerst met pen en papier, en als het niet lukt of als je meer wilt begrijpen van de opgave nadat je de uitwerkingen hebt bekeken, probeer om een GeoGebra te maken daarvan. Je zult verrast worden hoeveel meer kennis je zult bezitten van de opgave als je het in GeoGebra zet. Er gaat een hele wereld open!

Als we het hebben getekend voor een paar waarden van BC, zou het niet gek zijn om te vermoeden dat de locus van M een cirkel zal zijn. Het is dan ook redelijk om te vermoeden dat het vormen van die cirkel iets te maken heeft met het feit dat B en C zelf over een cirkel bewegen. Maar het is niet duidelijk hoe de cirkelbeweging van B en C de locus van M veroorzaakt en hoe we dat kunnen bewijzen.

De vraag is natuurlijk nu: "Wat is de enerlaatste stap?"
Dat, moet ik toegeven, is best lastig om te bedenken gelijk bij deze opgave, omdat deze opgave veel bewegende deeltjes heeft. En het is ook lastig te bepalen waar precies die cirkel van M is. Het lijkt wel in een willekeurige plek te staan in de diagram. Een voorstel zou kunnen zijn om te kijken of andere punten ook in een cirkel bewegen. Dat is niet zo gek, want het zou kunnen dat we door de locus van andere punten de locus van M zouden kunnen beredeneren. Hier zou homothetie misschien een eindje kunnen helpen. Punt M is irritant omdat het lastig te bereiken is. Het is namelijk niet direct verbonden met de oorzaken punt B en C. De vraag zouden we veel makkelijker kunnen maken door op de onbekende locus van punt M een homothetie toe te passen door een vaste punt, zoals A bijvoorbeeld, zodat het object (punt M) op een punt komt te staan die wel makkelijk mee te werken is. Maar welke punt zullen we het beeld maken van deze homothetie? Het beste

is als we ook de factor k weten van de te doen homothetie zodat we de locus van M ook terug zullen kunnen beredeneren. Dus, welke verhoudingen weten we allemaal in deze meetkundig figuur? Natuurlijk dat $\frac{|AT|}{|AM|} = \frac{3}{2}$ is! Dus, we doen nu een homothetie op punt M met centrum A en factor $\frac{3}{2}$ om bij punt T terecht te komen. De vraag is dus nu: wat is de locus van punt T?

En dat is een veel makkelijker vraag, want als we punt O, de middelpunt van de cirkel introduceren, krijgen we te maken met een rechthoekige driehoek, namelijk ΔOND, die altijd rechthoekig is. Tijd voor Thales dus! Ergo, dit gepaard met het feit dat O en D op dezelfde plek blijven (WAAROM IS DIT BELANGRIJK? CHECK DIT!), impliceert dat de locus van T een cirkel is met middellijn OD. En dus, de locus van M is de homothetie van de cirkel met middellijn OD met centrum A en factor (LET OP!) $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$, omdat we die homothetie die we eerder hadden toegepast nu terugtrekken. Zie je hoe homothetieën zo'n centrale rol speelde in deze opgave?

Er valt veel meer te weten over homothetieën. Als je geïnteresseerd bent, google maar "Homothety pdf" en je zult talloze zeer leuke werkbladen vinden die allemaal leuke dingen doen met homothetieën.

(III) COÖRDINATEN

De opgave wordt een standaard meetkunde opgave nadat je een vermoeden hebt opgesteld en een bepaalde aanvalshoek hebt gekozen. Maar dit kan natuurlijk niet altijd. Soms is het erg lastig om een synthetische oplossing te vinden voor een bepaalde situatie. Of het kan ook gebeuren dat het juist erg gemakkelijk is om een analytische oplossing te vinden.

Ik heb door het hele boek je afgeraden om een analytische oplossing te gebruiken voor een meetkunde opgave, maar ik maak graag daarvoor een uitzondering bij locus opgaven, omdat het soms zoveel makkelijker wordt en je met een analytische methode ook veel meer en veel sneller over alle eigenschappen van een bepaalde locus kan weten.

★**Opgave M9.V3.** Zij een lijn m en punt A, niet in m. Twee lijnen k en l snijden elkaar loodrecht in A. De snijpunt tussen l en m noemen we punt P. De lijn loodrecht aan m door punt P snijdt k in punt S. Wat is de meetkundige plaats van punt S terwijl k en l zich draaien om A?

Als je dit synthetisch zou proberen zou het erg lastig worden. Als je veel mogelijke posities van S hebt getekend, zou je ontdekken dat het op een parabool zal moeten lijken. Maar hoe zal je dat dan bewijzen? Je zou de definitie voor een parabool kunnen gebruiken dat het de verzameling punten is waarbij ze op gelijke afstand van een vaste punt en een richtlijn zijn. Maar het blijft lastig, want de brandpunt zou je bijvoorbeeld zelf moeten construeren. Het is vast mogelijk, omdat dit niet een moeilijke opgave is, maar zie je hoe complex het kan worden? Je moet namelijk bewijzen dat het een parabool is met een bepaalde richtlijn en een bepaalde brandpunt! Zelfs als er niet gevraagd wordt, moet je ze construeren om te bewijzen dat het om een parabool gaat. Maar hoe weet je dat het bijvoorbeeld niet om een kettinglijn gaat?

Maar het is erg gemakkelijk om deze opgave op een analytische manier op te lossen, omdat het slechts gaat over lijnen. Met een paar cirkels zou het ook best goed aflopen. Ik raad je aan om een paar meetkunde opgaven van eerder in dit werkstuk opnieuw te maken, maar deze keer op een analytische wijze. Zo zal je jezelf aanleren welke soorten constructies makkelijk en moeilijk zijn om met coördinaten uit te drukken. Je moet makkelijk kunnen inzien of een opgave makkelijk of moeilijk zal zijn om op een analytische wijze op te lossen.

Maar deze opgave is zeker makkelijk om op een analytische wijze op te lossen. Maar wat belangrijk is om te weten, is dat je bij een analytische oplossing zo weinig mogelijk variabelen wil gebruiken zodat de algebra niet de oplossing verstopt, als het ware. Zo is het niet wijs om bij deze opgave m als ene lijn $y = ax + b$ te stellen. Het is namelijk genoeg om de opgave op te lossen voor als $m : y = 0$. Zie je hoezo wij dit in deze opgave kunnen doen? En we hoeven voor A ook nog slechts de y-coördinaat variabel te houden. Want de opstelling zou niet veranderen als je de x-coördinaat van A zou veranderen, omdat lijn m helemaal links en rechts dezelfde steeds blijft. De enige ding wat de opstelling verandert is de afstand van A tot de lijn m. Dus, $A(0, k)$ met $k \neq 0$. Lijnen k en l zijn door deze, wat we noemen versimpelingen z.v.v.a. (zonder verlies van algemeenheid), ook veel makkelijker uit te drukken. Dus $k : y = ax + k$ en $l : y = -\frac{1}{a}x + k$. We kunnen nu de rest van het diagram uitdrukken. Punt P kan je vinden door $y = 0$ in te vullen bij l. Je krijgt dan $0 = -\frac{1}{a}x + k \implies x = k \cdot a$. Loodlijn door P is dan de verticale $x = x_P = k \cdot a$. S is de snijpunt van k en de loodlijn door P, dus $y_S = a \cdot k \cdot a + k = k(a^2 + 1)$. Dus, $S(k \cdot a, k(a^2 + 1))$. Wij zijn eigenlijk al klaar. Als je het zou willen herleiden tot een formule of vergelijking met y en x, zou je dan kunnen kijken hoe je van x_S naar y_S kunt gaan met een reeks operaties. Zo kun je krijgen dat $x_S^2 \cdot \frac{1}{k} + k = y_s$. Dus, $y_S = \frac{1}{k}x_s^2 + k$. Dus, de locus van S is een parabool die beschreven wordt door de formule $y = \frac{1}{k}x^2 + k$.

Soms kan zo'n herleiding met operaties van x naar y erg lastig zijn. Vaak is het gelukkig bij locus opgaven in de wiskunde olympiade dat het gaat over cirkels en lijnen. Zelden parabolen en ellipsen en andere kegelsneden en nog meer zelden dingen zoals een sinusoïde of een kettinglijn.

Maar coördinaten zijn erg saai. Er zijn ook manieren om met complexe getallen meetkunde opgaven op te lossen. Ik raad zowel geïnteresseerden niet niet-geïnteresseerder om deze video te kijken, omdat het niet alleen over complexe getallen een mooie introductie biedt, maar ook wat ik hiervoor heb uitgelegd verduidelijkt in de taal van animatie: https://www.youtube.com/watch?v=_hmNwG7Ppyo&ab_channel=NumberCruncher

NOG ÉÉN TIP: Leer het omgekeerde van alle stellingen! Het is zo handig om daarmee allerlei loci te bewijzen. Wat is het omgekeerde van de Stelling van Thales? En van de Stelling van de Constante Hoek? En van de formule voor de oppervlakte van een driehoek? (Strikvraag die laatste trouwens...)

OEFENINGEN

★**Opgave M9.1.** Opgave M9 was ook op een analytische manier te doen. Doe het! Als je het op een analytische manier had gemaakt, doe het dan nu op een synthetische manier!

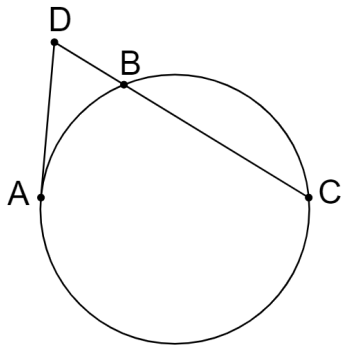
★**Opgave M9.2 (Challenge and Thrill of Pre-College Mathematics).** O is een vast punt; P is een variabel punt op een vaste cirkel S. Als P' op de lijn OP staat zodat $\frac{OP'}{OP} = \lambda =$ een constante is, wat is dan de meetkundige plaats van P'?

★★**Opgave M9.3.** Een driehoek ΔABC heeft een vaste zijde AB en de verhouding van de andere twee zijden is constant. Bewijs dat de meetkundige plaats van hoekpunt C een cirkel is met middelpunt op AB. Deze cirkel wordt de cirkel van Apollonius genoemd.

★★**Opgave M9.4 (Argentinië L3 Provincial 2015).** Er wordt een lijn r en een punt A dat niet op de lijn ligt gegeven. Elk punt M van de lijn r bepaalt een punt N van het vlak zodat de driehoek AMN gelijkzijdig is, alleen rekening houdend met de hoekpunten van de driehoek AMN die met de klok mee gaan. Zoek de meetkundige plaats van de hoekpunten N van de driehoeken AMN als het hoekpunt M beweegt over de lijn r.

★★**Opgave M9.5 (Bron onbekend).** Zij twee loodrecht snijdende lijnen k en l die snijden in O. Neem steeds een punt A op k en een punt B op l zodat $O(\Delta AOB) = c$, waarbij c een constante is. Bewijs dat de locus van de middelpunt van de lijnstuk AB een hyperbool is. Tip: een hyperbool wordt gegeven door een vergelijking van de vorm $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

★★★**Opgave M9.6 (BMO2 2014/15).**
(a) Zij een cirkel met raaklijn AD en snijdende lijn DBC zoals in de figuur hiernaast is weergegeven. Bewijs dat geldt $AD^2 = BD \cdot CD$. Deze stelling is één van de drie mogelijke situaties van de Macht van een Punt bij een Cirkel (in het engels Power of a Point).
(b) Twee cirkels raken elkaar inwendig in A. Een variabel koord PQ van de buitenste cirkel raakt de binnenste cirkel. Bewijs dat de meetkundige plaats van de middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek AQP een andere cirkel is die de gegeven cirkels raakt in A.



★★★**Opgave M9.7 (IMO 1960).** Zij kubus $ABCD\ A'B'C'D'$ (met vlak $ABCD$ direct boven vlak $A'B'C'D'$).
(a) Bepaal de locus van de middelpunten van segmenten XY, waarbij X een willekeurig punt van AC is en Y een willekeurig punt van $B'D'$ is.
(b) Bepaal de locus van punten Z die op de lijnstukken XY van onderdeel (a) liggen, zodat $|ZY| = 2|XZ|$.

★★★**Opgave M9.8 (CSMO 1956 National Round).** Zij halve cirkel AB en punt X op de halve cirkel. Beschouw een punt Y op straal AX zodanig dat $|XY| = |XB|$. Vind de meetkundige plaats van alle punten Y wanneer X beweegt op de boog AB (exclusief de eindpunten).

★★★**Opgave M9.9.** Een ellips is een soort ei vorm. Er zijn twee definities voor de ellips.

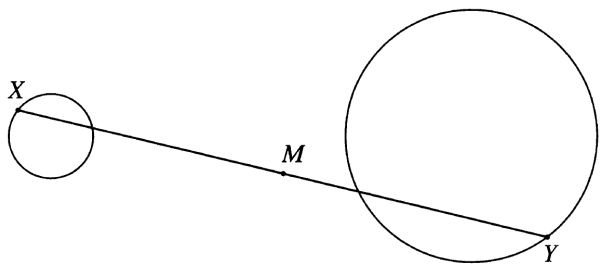
(I) Een ellips is de meetkundige plaats van punten waarvan de som van hun afstanden tot twee vaste punten constant is.

(II) Een ellips is de locus is van alle punten met gelijke afstand tot een cirkel en een punt binnen de cirkel.

(a) Bewijs dat (I) $\Longleftrightarrow$ (II).
(b) Zij, op een lijn XY, 2 punten A en B en een derde punt C, waarbij die zich buiten het lijnstuk AB bevindt. Zoek de meetkundige plaats van het snijpunt van de raaklijnen door A en B aan elk van de cirkels die XY raken in punt C.
(uitdaging) Bewijs dat de vergelijking van een ellips van de vorm $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is.

z.o.z.

★★★**Opgave M9.10 (Putnam 1996).** Let C_1 and C_2 be circles whose centers are 10 units apart, and whose radii are 1 and 3. Find, with proof, the locus of all points M for which there exist points X on C_1 and Y on C_2 such that M is the midpoint of the line segment XY.
Hint



EINDE LES