Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

ISBN 978-90-822022-0-5

info@wiskundeolympiade.nl
www.wiskundeolympiade.nl

Gedrukt door drukkerij Zoeterhage, Zoetermeer.
Ontwerp omslag door Ad van den Broek, Wilson Design, Uden.

Inhoudsopgave

Inleiding

Doe jij mee met de Nederlandse Wiskunde Olympiade en wil je graag goed beslagen ten ijs komen bij de eerste of de tweede ronde? In dit boek vind je tien strategieën die vaak goed van pas zullen komen. Per hoofdstuk staat kort en bondig de strategie toegelicht, waarna je direct aan de slag kan met oefenopgaven waarbij die strategie nuttig is. Deze opgaven zijn voornamelijk afkomstig uit oude rondes van de Wiskunde Olympiade en staan per hoofdstuk gesorteerd in oplopende moeilijkheidsgraad. Bij sommige van de moeilijkere opgaven heb je meerdere strategieën nodig en daarnaast natuurlijk een gezonde dosis creativiteit en doorzettingsvermogen.

Hoe gaat de Wiskunde Olympiade ook al weer in zijn werk? De eerste ronde vindt eind januari plaats op je eigen school. Je krijgt twee uur de tijd om de antwoorden te vinden bij een aantal opgaven. Er zijn acht vijfkeuze-opgaven (A-opgaven) en vier open opgaven met een exact getal als uitkomst (B-opgaven). Je hoeft geen bewijs of uitwerking te geven. Als je bij de (ongeveer) 1000 deelnemers met de hoogste resultaten zit, dan krijg je een uitnodiging om aan de tweede ronde mee te doen. Deze wordt in maart gehouden op een aantal Nederlandse universiteiten. De tweede ronde is vanzelfsprekend moeilijker dan de eerste ronde. Er zijn geen meerkeuze-opgaven meer; de wedstrijd bestaat uit B-opgaven en een aantal opgaven waarbij je niet alleen de uitkomst moet geven, maar ook je uitwerking (C-opgaven).

De (ongeveer) 130 beste leerlingen uit het land worden vervolgens uitgenodigd voor de landelijke finale. Die wordt gehouden in september, dus in het volgende schooljaar. De finale duurt drie uur en in die tijd moet je vijf opgaven oplossen. Bij elke opgave moet je een volledige berekening geven of een sluitend bewijs. Voor de finale krijg je een speciale training van vier middagen aangeboden op een universiteit. Het finaletrainingsmateriaal (dat veel verder voert dan dit boek) is te vinden op onze website: `www.wiskundeolympiade.nl/publicaties/finaletraining`.

Dit boek is geschikt voor alle leerlingen in het havo/vwo. Bij sommige opgaven is er wel iets meer voorkennis vereist dan bij andere opgaven, in het bijzonder over:

- kwadraten en wortels
- de som van de hoeken van een driehoek
- eigenschappen van gelijkbenige en gelijkzijdige driehoek
- gelijkvormigheid van driehoeken
- oppervlakte en omtrek van rechthoek, driehoek en cirkel
- stelling van Pythagoras

Bij elke opgave in dit boek staat vermeld in welke ronde deze opgave voorkwam en of het een A-, B- of C-opgave was. Zo kun je je eigen ideale trainingsprogramma voor de eerste of juist de tweede ronde samenstellen. Veel plezier ermee!

Opmerkingen voor de docent

Misschien is uw school al in het bezit van het Wiskunde Olympiade Puzzelspel, met daarin veel oude A-opgaven van de eerste ronde. Ook dat is prima in te zetten bij de voorbereiding van uw leerlingen op de eerste ronde. Het is goed om te weten dat in dit boek juist weer andere opgaven opgenomen zijn; dit boek vormt daarmee een mooie aanvulling op het Puzzelspel.

In deel II vindt u van elke opgave een uitwerking die gebruik maakt van de strategie in dat hoofdstuk. Uiteraard zijn er vaak ook nog andere oplossingen mogelijk. Over enkele van de opgaven is in de olympiaderubriek van het tijdschrift Pythagoras een artikel verschenen dat verschillende oplossingen van die opgave uitgebreid bespreekt. Een overzicht hiervan staat achterin. Alle artikelen zijn te vinden op `www.wiskundeolympiade.nl/publicaties/artikelen`.

Dankwoord

De wedstrijdrondes van de Nederlandse Wiskunde Olympiade worden samengesteld door een opgavecommissie. We bedanken alle leden van de opgavecommissie voor de door hen bedachte en geselecteerde opgaven die in dit boek zijn opgenomen. Bijzonder erkentelijk zijn we Dion Gijswijt en Raymond van Bommel, van wiens LaTeX-bestanden en figuren we naar hartelust gebruik hebben gemaakt bij de samenstelling van dit boek.

We zijn dankbaar voor de opmerkingen van Mariken Barents en Tom Verhoeff op de conceptversie, die tot tal van verbeteringen hebben geleid.

Deze uitgave is mogelijk gemaakt door een bijdrage van het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap.

Deel I

Theorie en opgaven

HOOFDSTUK 1

Patroon herkennen

De tactiek van patroon herkennen kunnen we gebruiken bij opgaven waar je iets uit moet rekenen wat te veel werk is omdat de getallen te groot zijn.

Voorbeeld.
Het getal $a = 11 \dots 111$ bstaat uit precies 2011 enen.
Wat is de rest bij deling van a door 37?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) 11

Eerste ronde 2011, A6

Zo'n groot getal delen door 37 om te kijken wat de rest is, lukt niet. Maar in plaats van 2011 enen, kunnen we eerst eens kijken naar kleinere getallen die uit alleen enen bestaan.

Strategie

- Maak de opgave kleiner: vervang een groot getal (zoals hier 2011) in de opgave door kleinere getallen (bijvoorbeeld 1, 2, 3, 4, 5).
- Los de kleinere versies van de opgave op en kijk of je een patroon ziet. (Zo niet, bekijk nog meer gevallen.)
- Zet het patroon voort zodat je de echte opgave kunt oplossen.

Zorg wel dat je jezelf echt overtuigt van het patroon: waarom gaat dit steeds op dezelfde manier door? Voor een echt wiskundig bewijs zou alleen het herkennen van het patroon niet voldoende zijn; je moet dan ook beargumenteren waarom het patroon zich op deze manier voortzet.

Uitwerking.
In plaats van het getal met 2011 enen door 37 te delen, delen we 1, 11, 111, 1111 enzovoorts

door 37 en kijken we wat daar uitkomt.

$$\begin{aligned}
1 &= 0 \times 37 + 1,\\
11 &= 0 \times 37 + 11,\\
111 &= 3 \times 37 + 0,\\
1111 &= 30 \times 37 + 1,\\
11111 &= 300 \times 37 + 11,\\
111111 &= 3003 \times 37 + 0.
\end{aligned}$$

We zien een duidelijk patroon. Overtuig jezelf ervan dat dit zich voortzet! Blijkbaar is de rest 0 als het getal uit een drievoud aan enen bestaat: uit 3 enen, 6 enen, 9 enen, enzovoorts. Nu is $2010 = 670 \times 3$, dus 2010 zit in dit rijtje en het getal met 2010 enen geeft rest 0. Het getal met 2011 enen geeft dus volgens het patroon rest 1. $\square$

Opgaven

Opgave 1.1.
Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2013}?

A) 0625 B) 2525 C) 3125 D) 5625 E) 8125

Eerste ronde 2013, A7

Opgave 1.2.
We bekijken een rij getallen die met $27, 1, 2012, \ldots$ begint. Voor deze rij getallen geldt het volgende. Als we de getallen op plek 1, 2 en 3 in de rij optellen, krijgen we 2040. Van de getallen op plek 2, 3 en 4 is de som 2039 en van de getallen op plek 3, 4 en 5 is de som 2038, enzovoorts. Algemeen geldt dus: de getallen op plek k, $k+1$ en $k+2$ samen zijn $2041 - k$.
Welk getal staat er op plek 2013 in de rij?

A) -670 B) -669 C) 670 D) 1341 E) 1342

Eerste ronde 2012, A8

Opgave 1.3.
Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999\ldots99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal?

Eerste ronde 2009, B2

Opgave 1.4.
We hebben 10.000 kaarten genummerd van 1 tot en met 10.000. We doen steeds de volgende stap: we halen alle kaarten weg waarop een kwadraat staat en we hernummeren de overgebleven kaarten weer opeenvolgend vanaf 1.
Na hoeveel stappen hebben we nog maar één kaart over?

Tweede ronde 2011, B4

Opgave 1.5.
Op elk van de 10.000 velden van een 100×100-schaakbord staat een getal. Op de bovenste rij staan van links naar rechts de getallen 0 tot en met 99. In de linkerkolom staan van boven naar beneden de getallen 0 tot en met 99. De som van vier getallen in een 2×2-blokje is altijd 20. Welk getal staat helemaal rechtsonder op het bord?

Tweede ronde 2012, B4

Opgave 1.6.
De oneindige rij getallen

$$0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1, -1, -2, -1,\ 1,\ 3,\ \ldots$$

voldoet aan de volgende regel. Voor elk viertal opeenvolgende getallen $\ldots, a, b, c, d, \ldots$ uit de rij geldt steeds dat d gelijk is aan c min het kleinste van de twee getallen a en b. Zo is het negende getal uit de rij gelijk aan $-1-(-2)=1$ en het tiende getal gelijk aan $1-(-2)=3$. Bereken het 100-ste getal uit de rij.

Tweede ronde 2010, B4

Opgave 1.7.
Op een bord met 28 rijen en 37 kolommen wordt in elk vakje met een rode pen een getal geschreven: in de bovenste rij van links naar rechts de getallen 1 tot en met 37, in de rij eronder van links naar rechts de getallen 38 tot en met 74, enzovoorts.
Met een groene pen wordt daarna opnieuw in elk vakje een getal geschreven, maar nu komen de getallen 1 tot en met 28 van boven naar beneden in de linker kolom, in de kolom ernaast van boven naar beneden de getallen 29 tot en met 56, enzovoorts.
In het vakje linksboven staat nu zowel in rood als in groen het getal 1. Tel de rode getallen op, van alle vakjes waar in rood en groen hetzelfde getal staat. Wat is de uitkomst?

Eerste ronde 2010, B4

Opgave 1.8.
We noemen een drietal (x, y, z) *goed* als x, y en z positieve gehele getallen zijn met $y \geqslant 2$ en er bovendien geldt dat $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.
Een voorbeeld van een goed drietal is $(19, 6, 16)$, want er geldt: $6 \geqslant 2$ en $19^2 - 3 \cdot 6^2 = 16^2 - 3$.
Laat zien dat er voor elk *oneven* getal $x \geqslant 5$ minstens twee goede drietallen (x, y, z) bestaan.

Tweede ronde 2013, C2(a)

HOOFDSTUK 2

Systematisch proberen en tellen

Het is een kunst om mogelijkheden goed op een rijtje te zetten en daarbij geen dingen over het hoofd te zien of juist dubbel te tellen. Bijvoorbeeld als je alle getallen bestaande uit de cijfers 2, 4, 5 en 9 moet tellen.

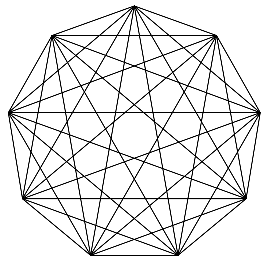
Strategie

- Begin niet zomaar met willekeurig dingen opschrijven. Bedenk eerst een goede systematiek waarmee je zeker weet dat je alles langs loopt. Probeer hiervoor de dingen die je moet tellen, in verschillende stukken op te delen. Zo kun je bijvoorbeeld eerst alle getallen die beginnen met een 2 opschrijven; daarna alle getallen die beginnen met een 4, enzovoorts.
- Soms is het handig om eerst een eis uit de opgave te vergeten, bijvoorbeeld als de vraag was welke getallen bestaande uit de cijfers 2, 4, 5 en 9 deelbaar zijn door 7. Dan is het het makkelijkste om toch eerst al die getallen bestaande uit die cijfers systematisch op te schrijven en dan pas uit te zoeken welke er deelbaar zijn door 7. (Eerst alle zevenvouden opschrijven en dan kijken welke er de juiste cijfers bevatten, is ook een mogelijkheid, maar dat is natuurlijk veel meer werk.)

Schrijf het overzichtelijk op; gebruik eventueel een tabel. Bijvoorbeeld alle getallen bestaande uit de cijfers 2, 4, 5, 9 zou je overzichtelijk als volgt kunnen opschrijven:

2459	4259	5249	9245
2495	4295	5294	9254
2549	4529	5429	9425
2594	4592	5492	9452
2945	4925	5924	9524
2954	4952	5942	9542

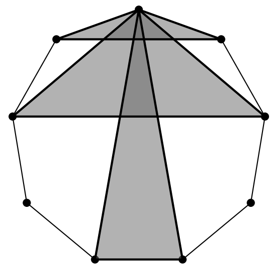
Voorbeeld.
Hiernaast zie je een regelmatige negenhoek met al zijn diagonalen.
Hoeveel gelijkbenige driehoeken zijn er waarvan de drie verschillende hoekpunten ook hoekpunten van de negenhoek zijn?
(Een driehoek is gelijkbenig als twee of drie zijden dezelfde lengte hebben.)



A) 27 B) 30 C) 33 D) 36 E) 39

Eerste ronde 2012, A3

Uitwerking.
We gaan deze mogelijkheden systematisch ordenen door eerst alle driehoeken te bekijken met het bovenste punt van de negenhoek als top van de gelijkbenige driehoek. Hier zit echter een adder onder het gras: een gelijkzijdige driehoek is wel gelijkbenig, maar heeft geen unieke top. Dus de gelijkzijdige driehoeken doen we even eerst: dat zijn er 3. Dan kunnen we verder de gelijkbenige-maar-niet-gelijkzijdige driehoeken systematisch tellen. Met als top het bovenste punt zijn dat er 3; zie de figuur. Omdat we dit bij elk van de 9 punten kunnen doen, geeft dat $3 \times 9 = 27$ mogelijkheden. In totaal zijn er dus $3 + 27 = 30$ gelijkbenige driehoeken.



□

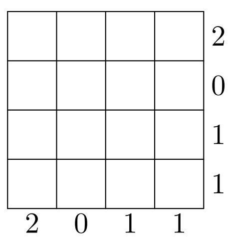
Opgaven

Opgave 2.1.
Een verkeerslicht staat om en om een bepaalde tijd op groen en op rood. De periodes groen en rood duren even lang, allebei steeds 1, 2 of 3 minuten. Er zijn vier kleurcombinaties voor het licht op de tijdstippen 12:08 en 12:09: rood–rood, rood–groen, groen–rood en groen–groen.
Hoeveel van de vier combinaties zijn mogelijk als gegeven is dat het licht om (precies) 12:05 op rood stond en om (precies) 12:12 ook op rood?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Het licht kan niet op zowel 12:05 als 12:12 rood zijn.

Eerste ronde 2013, A1

Opgave 2.2.
De velden van een 4×4-bord worden wit of zwart gekleurd. Naast elke rij en onder elke kolom staat aangegeven hoeveel velden in die rij of kolom zwart moeten zijn.
Op hoeveel manieren kan het bord gekleurd worden?



A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 8

Eerste ronde 2011, A1

Opgave 2.3.
Wat is het kleinste positieve gehele getal bestaande uit de cijfers 2, 4 en 8, waarbij elk van deze cijfers minstens twee keer voorkomt en het getal niet deelbaar is door 4?

Eerste ronde 2013, B1

Opgave 2.4.
We bekijken alle getallen van vijf cijfers. Hiervan zijn er a met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 25, en b met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 15.
Bepaal $\frac{a}{b}$.

Eerste ronde 2012, B1

Opgave 2.5.
Zes padvinders gaan op speurtocht. Op zaterdag gaan ze naar het bos en op zondag gaan ze de bergen in. Op beide dagen moeten ze in tweetallen hun weg vinden. Hun leider wil ze voor elk van beide tochten in paren verdelen, zó dat niemand op de tweede dag dezelfde partner heeft als op de eerste dag. Op hoeveel manieren kan hij dat doen?

Eerste ronde 2011, B3

Opgave 2.6.
We schrijven de getallen 1 tot en met 30 000 achter elkaar op zodat een lange rij cijfers ontstaat:

$$123456789101112\ldots30000.$$

Hoe vaak komt 2013 in deze rij voor?

Eerste ronde 2013, B4

Opgave 2.7.
Bepaal alle drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen met de volgende eigenschappen:

- er geldt $a < b < c$ en a, b en c zijn drie opeenvolgende oneven getallen;
- het getal $a^2 + b^2 + c^2$ bestaat uit vier gelijke cijfers.

Tweede ronde 2011, C1

Opgave 2.8.
We bekijken in deze opgave positieve gehele getallen bestaande uit 5 cijfers, waarvan het eerste en het laatste cijfer niet nul zijn. We noemen zo'n getal een *palindroomproduct* als het aan de volgende twee voorwaarden voldoet:

- het getal is een palindroom (d.w.z. van links naar rechts gelezen hetzelfde als van rechts naar links gelezen);
- het getal is een product van twee positieve gehele getallen, waarvan het ene getal van links naar rechts gelezen gelijk is aan het andere getal van rechts naar links gelezen, zoals 4831 en 1384.

Zo is 20502 een palindroomproduct, want $102 \cdot 201 = 20502$ en 20502 is zelf een palindroom.
Bepaal alle palindroomproducten van 5 cijfers.

Finale 2009, opgave 1

HOOFDSTUK 3

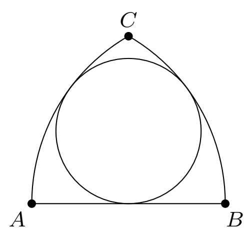
Letters invoeren

Bij veel problemen helpt het om een letter in te voeren voor iets dat je nog niet weet, maar waar je wel graag mee wilt rekenen.

Strategie

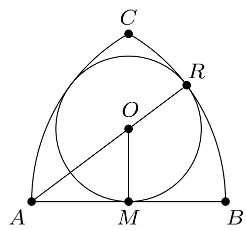
- Voer een letter in voor een onbekende die centraal staat in de opgave. Dat kan de lengte van een lijnstuk zijn, de grootte van een hoek of een bepaalde hoeveelheid die genoemd wordt in de opgave. Vaak is het handig om dat wat je moet uitrekenen juist een naam te geven.
- Druk zoveel mogelijke andere dingen uit in jouw letter.
- Probeer hiermee een vergelijking af te leiden voor jouw letter, waarmee je hem kunt uitrekenen.
- Soms is het nodig om meer dan één letter in te voeren. Maar wees wel zuinig met je letters: als je vijf verschillende letters invoert voor alles wat je nog niet weet, zie je door de bomen (letters) het bos niet meer.

Voorbeeld.
In de figuur zie je een 'spitsboog' ABC en zijn ingeschreven cirkel. De spitsboog bestaat uit lijnstuk AB met lengte 1, cirkelboog BC met middelpunt A en cirkelboog AC met middelpunt B.
Hoe groot is de straal van de ingeschreven cirkel van de spitsboog?



Eerste ronde 2011, B4

Uitwerking.
Bekijk de ingeschreven cirkel. We voeren een letter in voor de straal: r. Verder geven we enkele punten een naam: het middelpunt noemen we O en de raakpunten M en R. De drie punten A, O en R liggen nu op een lijn. We willen nu zoveel mogelijk lengtes in r uitdrukken. We zien dat $|AO| = |AR| - |OR| = 1 - r$ en $|OM| = r$. Verder weten we $|AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}$. Met behulp van de stelling van Pythagoras kunnen we nu een vergelijking opstellen: $|AM|^2 + |OM|^2 = |AO|^2$ en dus $\frac{1}{4} + r^2 = (1-r)^2 = r^2 - 2r + 1$. Hieruit volgt dat $2r = \frac{3}{4}$ en dus $r = \frac{3}{8}$. □

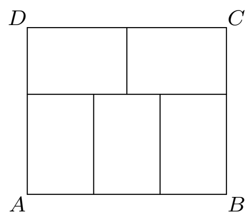


Opgaven

Opgave 3.1.
Rechthoek $ABCD$ is verdeeld in vijf gelijke rechthoekjes. De omtrek van elk van deze rechthoekjes is 20.
Wat is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$?

A) 72 B) 112 C) 120 D) 140 E) 150

Eerste ronde 2013, A2



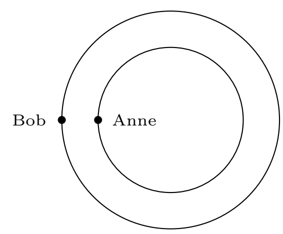
Opgave 3.2.
Frank heeft een la waarin allemaal losse sokken zitten. Er zitten 10 rode sokken in en de rest van de sokken is blauw. Hij gaat blind een aantal sokken uit de la pakken en wil daarna twee sokken van een bepaalde kleur hebben. Om zeker te zijn van minstens twee rode sokken moet hij twee keer zoveel sokken pakken als om zeker te zijn van minstens twee blauwe sokken.
Hoeveel sokken zitten er in totaal in de la?

A) 14 B) 18 C) 26 D) 32 E) 40

Eerste ronde 2012, A5

Opgave 3.3.
Anne en Bob zitten in een kermisattractie. Ze bewegen in cirkels rond hetzelfde middelpunt en in dezelfde richting. Anne gaat één keer per 20 seconden rond, Bob één keer per 28 seconden. Op een gegeven moment zijn ze op de kleinst mogelijke afstand van elkaar (zie de tekening).
Hoeveel seconden duurt het daarna voordat Anne en Bob juist zo ver mogelijk van elkaar verwijderd zijn?

Eerste ronde 2011, A7



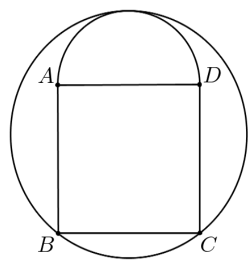
Opgave 3.4.
Een bus komt langs drie haltes. De middelste halte ligt even ver van de eerste halte als van de laatste halte. Fred staat bij de middelste halte en moet nog 15 minuten wachten voor de bus arriveert. Als hij naar de eerste halte fietst, zal hij daar gelijktijdig met de bus aankomen. Als hij in plaats daarvan naar de laatste halte rent, zal hij daar ook gelijktijdig met de bus aankomen.
Hoe lang zou Fred erover doen om naar de laatste halte te fietsen en vervolgens naar de middelste halte terug te rennen?

Eerste ronde 2013, B3

Opgave 3.5.
Een aantal hokjes van een vel ruitjespapier vormen samen een rechthoek. Van deze hokjes liggen er evenveel *wel* als *niet* aan de rand van de rechthoek.
Hoeveel hokjes telt de rechthoek in totaal? Geef alle mogelijkheden.

Eerste ronde 2012, B3

Opgave 3.6.
Een figuur bestaat uit een vierkant $ABCD$ en een halve cirkel met middellijn AD buiten het vierkant. De zijde van het vierkant heeft lengte 1. Wat is de straal van de omgeschreven cirkel van de figuur?

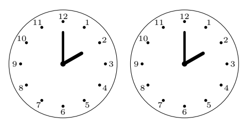


Eerste ronde 2010, B3

Opgave 3.7.
Een aantal scholieren deed mee aan een test waar je 100 punten voor kon halen. Iedereen scoorde minstens 60 punten. Precies vijf scholieren scoorden 100 punten. De gemiddelde score van de deelnemende scholieren was 76 punten.
Hoeveel scholieren deden er minstens mee aan deze test?

Tweede ronde 2013, B1

Opgave 3.8.
De wijzers van twee klokken, zoals die in de figuur hiernaast, draaien met constante snelheid rond. Beide klokken lopen niet meer goed; de een loopt precies 1% sneller dan de werkelijke tijd, en de ander zelfs precies 5% sneller dan de werkelijke tijd. Op een bepaald moment wijzen ze allebei precies 2 uur aan. Na verloop van tijd wijzen de klokken voor het eerst opnieuw dezelfde tijd aan.
Welke tijd wijzen ze op dat moment aan?



Tweede ronde 2013, B3

HOOFDSTUK 4

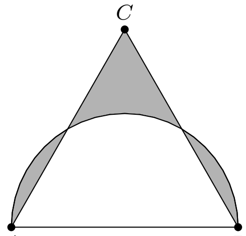
Knippen en plakken

Opgaven waarbij je de oppervlakte van een gebied moet berekenen, zien er soms heel ingewikkeld uit. Maar ze kunnen veel makkelijker worden met behulp van knippen en plakken.

Strategie

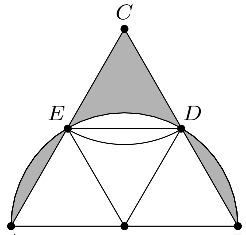
- Teken hulplijntjes en kijk of je onderdelen van bekende figuren herkent (zoals gelijkzijdige driehoek en cirkelsector).
- Schuif gebieden naar een andere plek, zodat ze samen met een ander gebied een bekende figuur vormen en de berekeningen makkelijker worden.

Voorbeeld.
Een gelijkzijdige driehoek ABC heeft zijde 12. Een halve cirkel met middellijn AB snijdt de zijden AC en BC.
Bepaal de totale oppervlakte van het grijze gebied dat bestaat uit de twee cirkelsegmenten buiten de driehoek en het deel van de driehoek buiten de cirkel.



Eerste ronde 2012, B2

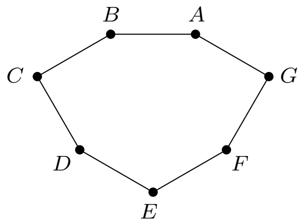
Uitwerking.
Teken de middens D, E en F van de zijden van driehoek ABC. Nu wordt driehoek DEF ook weer gelijkzijdig (met zijde 6). De zijde van deze kleine driehoek is precies de straal van de halve cirkel, dus D en E liggen precies op de snijpunten van de cirkel en de grote driehoek. Nu kunnen we het cirkelsegmentje bij AE precies in de holte bij DE stoppen. En het cirkelsegmentje bij BD plakken we er dan ook nog tegenaan. Zo wordt het grijze gebied een sector van de cirkel met middelpunt C en straal 6. Omdat driehoek CDE gelijkzijdig is, is dit $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$ deel van die cirkel. De oppervlakte van het grijze gebied is dus $\frac{1}{6}(\pi \cdot 6^2) = 6\pi$.



□

Opgaven

Opgave 4.1.
Gegeven is zevenhoek $ABCDEFG$, waarvan alle zijden lengte 2 hebben. Bovendien geldt: $\angle E = 120°$, $\angle C = \angle G = 90°$ en $\angle A = \angle B = \angle D = \angle F$. Wat is de oppervlakte van de zevenhoek?



A) $10 + 2\sqrt{2}$ B) $8 + 3\sqrt{3}$ C) 14 D) $10 + 2\sqrt{6}$ E) $8 + 3\sqrt{6}$

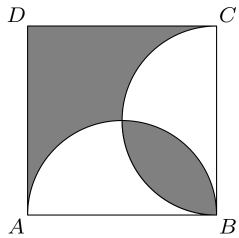
Eerste ronde 2011, A3

Opgave 4.2.
Een regelmatige zeshoek en een gelijkzijdige driehoek hebben dezelfde omtrek. Wat is verhouding *oppervlakte zeshoek* : *oppervlakte driehoek*?

A) $2:3$ B) $1:1$ C) $4:3$ D) $3:2$ E) $2:1$

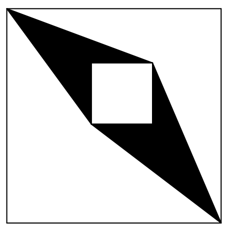
Eerste ronde 2013, A6

Opgave 4.3.
Gegeven is een vierkant $ABCD$ waarvan de zijden lengte 4 hebben. Aan de binnenkant van het vierkant zijn twee halve cirkels met middellijnen AB en BC getekend (zie figuur).
Wat is de gezamenlijke oppervlakte van de twee grijze gebieden?



Tweede ronde 2013, B2

Opgave 4.4.
Een vierkant met zijde 2 ligt binnen een vierkant met zijde 7. De zijden van het kleine vierkant zijn evenwijdig aan de zijden van het grote vierkant.
Wat is de oppervlakte van het zwarte gebied?



Tweede ronde 2011, B2

Opgave 4.5.
Bekijk een cirkel met middellijn AB. Punt C ligt op het lijnstuk AB zodanig dat $2 \cdot |AC| = |BC|$. De punten D en E liggen op de cirkel zodat CD loodrecht op AB staat en DE ook een middellijn van de cirkel is. Noteer de oppervlaktes van driehoeken ABD en CDE als $O(ABD)$ en $O(CDE)$. Bepaal de waarde van $\frac{O(ABD)}{O(CDE)}$.

Tweede ronde 2010, B2

HOOFDSTUK 5

Durf te proberen

Soms zie je niet direct hoe een opgave in elkaar zit of hoe je het zou kunnen aanpakken. In hoofdstuk 1 heb je al gezien dat het kan helpen om een kleiner geval van de opgave uit te proberen of om een stuk van een rij getallen verder uit te rekenen. Ook bij andere soorten opgaven helpt het vaak om gewoon wat te proberen. Wat precies, hangt erg van de opgave zelf af.

Strategie

- Moet je een zo groot mogelijke verzameling getallen maken met een bepaalde eigenschap, zoals in het voorbeeld hieronder? Begin dan gewoon met een paar willekeurige getallen en probeer er zoveel mogelijk toe te voegen.
- Zijn er rekenregels gegeven, waarvan je eigenlijk geen idee hebt wat ze nu precies betekenen, zoals in opgave 5.5? Stop er dan een paar concrete getallen in en kijk wat er gebeurt.
- Moet je een ingewikkeld getal of object vinden dat aan allerlei eisen moet voldoen, zoals in opgave 5.1? Probeer dan eerst iets te vinden wat al aan een deel van die eisen voldoet of wat er al een beetje op lijkt.
- Op zo'n manier krijgt je vanzelf gevoel voor wat er goed werkt en wat er niet goed werkt. Staren naar een opgave werkt meestal niet; dingen proberen vaak wel!

Voorbeeld.
Van de getallen 1 tot en met 100 wil Jaap er zoveel mogelijk (verschillende) op een blaadje papier schrijven. Er mogen geen twee getallen op het blaadje komen die bij elkaar opgeteld 125 zijn. Hoeveel getallen kan hij hoogstens op het blaadje schrijven?

A) 50 B) 61 C) 62 D) 63 E) 64

Eerste ronde 2011, A5

Lekker gaan proberen betekent in dit geval: schrijf maar wat getallen op en kijk of je tegen het probleem aanloopt dat er twee samen 125 zijn. Dus bijvoorbeeld: 1, 41, 27, 67, 98. Nu gaat het mis, want $98 + 27 = 125$. Dus blijkbaar mogen 98 en 27 niet tegelijkertijd. Zo kom je op het idee dat je heel veel paren getallen kunt maken die niet tegelijkertijd mogen voorkomen. Dit idee werken we hieronder verder uit tot een volledige oplossing.

Uitwerking.
De getallen 25 tot en met 100 kun je opdelen in paren die samen steeds optellen tot 125: $25+100=125$, $26+99=125$, en zo verder tot en met $62+63=125$. Dit zijn 38 paren getallen, waarvan hij steeds maar één getal mag gebruiken. Er zijn dus 38 getallen die hij zeker niet mag gebruiken. In totaal kan hij daarom niet meer dan $100-38=62$ getallen opschrijven. Het lukt hem wel om 62 getallen op te schrijven, bijvoorbeeld de getallen 1 tot en met 62. □

Opgaven

Opgave 5.1.
Vandaag is het 4 februari 2011. Deze datum wordt genoteerd als 04-02-2011. We kijken in deze opgave naar de eerstvolgende dag waarvan de datum met acht *verschillende* cijfers wordt geschreven. In welke maand valt die dag?

A) januari B) maart C) juni D) oktober E) december

Eerste ronde 2011, A2

Opgave 5.2.
Carry heeft zes kaarten. Op elke kaart staat een positief geheel getal geschreven. Zij kiest drie kaarten en rekent de som uit van de getallen op die kaarten. Zij doet dit voor alle 20 mogelijke combinaties van drie kaarten. Tienmaal krijgt Carry als uitkomst 16 en tienmaal uitkomst 18.
Wat is het kleinste getal dat op de kaarten voorkomt?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Eerste ronde 2012, A7

Opgave 5.3.
Van een 50-tal verschillende getallen uit de verzameling $\{1,2,3,\ldots,100\}$ is de som gelijk aan 2900. Wat is het kleinst mogelijke aantal *even* getallen onder deze 50 getallen?

Eerste ronde 2008, B2

Opgave 5.4.
Alle 2012 kamelen in Nederland moeten verdeeld worden over 40 weides. Geen twee weides mogen hetzelfde aantal kamelen krijgen. De weide in het centrum van Amsterdam moet het grootste aantal kamelen krijgen.
Hoeveel kamelen moeten daar minimaal komen te staan?

Tweede ronde 2012, B2

Opgave 5.5.
De bewerking $\odot$ voldoet voor alle positieve getallen x en y aan de volgende drie regels:

Regel 1: $(2x) \odot y = \frac{1}{2} + (x \odot y)$.

Regel 2: $y^2 \odot x = x^2 \odot y$.

Regel 3: $2 \odot 2 = \frac{3}{2}$.

Bereken $32 \odot 8$.

Eerste ronde 2012, B4

Opgave 5.6.
In een warenhuis loopt een roltrap van de begane grond naar de eerste verdieping. Dion gaat met deze roltrap omhoog; hij zet hierbij zelf ook nog een aantal stappen in een vast tempo. Raymond loopt over dezelfde roltrap, tegen de richting in, van boven naar beneden en zet hierbij stappen in hetzelfde tempo als Dion. Ze nemen allebei één trede per stap. Dion is na precies 12 stappen boven; Raymond is na precies 60 stappen beneden.
Hoeveel stappen zou Dion nodig hebben om boven te komen als de roltrap stilstond?

Eerste ronde 2011, B2

Opgave 5.7.
Voor elk tweetal positieve gehele getallen a en b definiëren we een bewerking $a \otimes b$ met de volgende drie eigenschappen:

Regel 1: $a \otimes a = a + 2$.

Regel 2: $a \otimes b = b \otimes a$.

Regel 3: $\dfrac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \dfrac{a+b}{b}$.

Bereken $8 \otimes 5$.

Eerste ronde 2007, B3

Opgave 5.8.
Je hebt één kaartje met daarop het getal 12. Je mag nieuwe kaartjes toevoegen aan je verzameling volgens de volgende regels.

- Als je al een kaartje met een getal a hebt, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $2a + 1$.
- Als je al een kaartje met een getal b hebt dat deelbaar is door 3, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $\frac{b}{3}$.

(a) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal 29 kunt maken.

(b) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal $2^{2012} - 1$ kunt maken.

(c) Laat zien dat je nooit een kaartje met daarop het getal 100 kunt maken.

Tweede ronde 2012, C1

Opgave 5.9.
We noemen een positief geheel getal van n cijfers ($n \geqslant 3$ en $n \leqslant 9$) *bovengemiddeld* als het voldoet aan de volgende twee eisen:

- het getal bevat alle cijfers van 1 tot en met n precies één keer;
- voor elk cijfer behalve de eerste twee geldt: het dubbele van het cijfer is minstens zo groot als de som van de twee cijfers die er direct voor staan.

Zo is 31254 bovengemiddeld, want het bestaat uit de cijfers 1 tot en met 5 en verder geldt

$$2 \cdot 2 \geqslant 3 + 1, \qquad 2 \cdot 5 \geqslant 1 + 2 \qquad \text{en} \qquad 2 \cdot 4 \geqslant 2 + 5.$$

(a) Geef een bovengemiddeld getal van 4 cijfers waarvan het eerste cijfer een 4 is.

(b) Laat zien dat er geen bovengemiddeld getal van 4 cijfers is waarvan het tweede cijfer een 4 is.

(c) Bepaal voor bovengemiddelde getallen van 7 cijfers alle mogelijke posities van het cijfer 7.

Tweede ronde 2013, C1

Opgave 5.10.
We nummeren de kolommen van een $n \times n$-bord van 1 tot en met n. In elk vakje van het bord zetten we een getal, op zo'n manier dat in elke rij precies de getallen 1 tot en met n staan (de volgorde kan in elke rij anders zijn) en in elke kolom ook precies de getallen 1 tot en met n staan. We kleuren vervolgens een vakje grijs als het getal in dat vakje groter is dan het nummer van de kolom waar het vakje in zit. In de figuur zie je een voorbeeld voor $n = 3$.

1	2	3
3	1	2
1	2	3
2	3	1

(a) Stel dat $n = 5$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?

(b) Stel dat $n = 10$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?

Finale 2012, opgave 2

HOOFDSTUK 6

Handig vergelijkingen combineren

Sommige opgaven bevatten meerdere vergelijkingen met variabelen (letters) die je moet combineren om tot de oplossing te komen.

Strategie

- Combineer twee vergelijkingen om variabelen te laten wegvallen, bijvoorbeeld door ze op te tellen of van elkaar af te halen. Bijvoorbeeld $a+b=3$ en $a+5b=10$ geeft door de eerste van de tweede af te halen dat $4b=7$.
- Druk een variabele uit in een andere, zodat je de eerste overal kunt vervangen door de uitdrukking met de andere. Bijvoorbeeld $a+b=3$ wordt $a=3-b$, waarna invullen in $a+5b=10$ leidt tot $3-b+5b=10$.

Voorbeeld.
Voor de getallen a, b, c, d en e geldt:

$$a+b+1 \;=\; b+c-2 \;=\; c+d+3 \;=\; d+e-4 \;=\; e+a+5.$$

Welk van deze vijf getallen is het grootst?

A) a B) b C) c D) d E) e

Eerste ronde 2013, A3

Uitwerking.
Uit $a+b+1=b+c-2$ valt b links en rechts weg, dus $a+1=c-2$ oftewel $c=a+3$. Zo ook volgt uit $e+a+5=d+e-4$ dat $d=a+9$. Ook geeft $c+d+3=d+e-4$ dat $e=c+7=a+3+7=a+10$. En uit $b+c-2=c+d+3$ volgt $b=d+5=a+9+5=a+14$. Dus de getallen a, b, c, d en e zijn gelijk aan a, $a+14$, $a+3$, $a+9$ en $a+10$. We zien dat b het grootste is. $\square$

We hebben nu elke letter uitgedrukt in a, maar het kan nog slimmer.

Uitwerking.
We noemen $s=a+b+1$. Dan is s dus gelijk aan elk van de vijf gegeven uitdrukkingen. Daarvan

tellen we nu steeds twee handig bij elkaar:

$$\begin{aligned}
2s &= (a+b+1)+(c+d+3) = a+b+c+d+4 = (a+b+c+d+e)-e+4,\\
2s &= (b+c-2)+(d+e-4) = b+c+d+e-6 = (a+b+c+d+e)-a-6,\\
2s &= (c+d+3)+(e+a+5) = a+c+d+e+8 = (a+b+c+d+e)-b+8,\\
2s &= (d+e-4)+(a+b+1) = a+b+d+e-3 = (a+b+c+d+e)-c-3,\\
2s &= (e+a+5)+(b+c-2) = a+b+c+e+3 = (a+b+c+d+e)-d+3.
\end{aligned}$$

Als we dit herschrijven, krijgen we de volgende vijf uitdrukkingen voor a tot en met e:

$$\begin{aligned}
e &= (a+b+c+d+e)-2s+4,\\
a &= (a+b+c+d+e)-2s-6,\\
b &= (a+b+c+d+e)-2s+8,\\
c &= (a+b+c+d+e)-2s-3,\\
d &= (a+b+c+d+e)-2s+3.
\end{aligned}$$

Nu zien we dat b het grootste getal is. $\square$

Opgaven

Opgave 6.1.
Alice heeft vijf reële getallen $a < b < c < d < e$. Hiervan telt ze elk tweetal getallen bij elkaar op en noteert de tien uitkomsten. De drie kleinste uitkomsten blijken 32, 36 en 37 te zijn, terwijl de twee grootste uitkomsten 48 en 51 zijn. Bepaal e.

Tweede ronde 2010, B1

Opgave 6.2.
In het getallenvierkant hiernaast staan positieve getallen. Het *product* van de getallen in iedere rij, iedere kolom en elk van de twee diagonalen is steeds hetzelfde.
Welk getal staat op de plaats van H?

Tweede ronde 2013, B4

$\frac{1}{2}$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

Opgave 6.3.
In een klas zitten 23 leerlingen die elk precies één vreemde taal hebben gekozen, namelijk Duits of Frans. Er zitten in totaal 10 meisjes in de klas, en er zijn in totaal 11 leerlingen die Frans doen. Het aantal meisjes dat Frans heeft gekozen plus het aantal jongens dat Duits heeft gekozen, is 16.
Hoeveel meisjes hebben Frans gekozen?

Tweede ronde 2011, B3

Opgave 6.4.
Bepaal een drietal gehele getallen (a, b, c) dat voldoet aan de vergelijkingen:

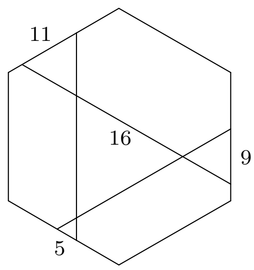
$$\begin{aligned} a + b + c &= 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 756 \\ a^2 &= bc \end{aligned}$$

Eerste ronde 2009, B4

Opgave 6.5.
Dertig scholieren doen mee aan een wiskundewedstrijd met zestien vragen. Bij elke vraag moeten ze een getal als antwoord geven. Voor elke vraag die een scholier binnen een minuut goed beantwoordt, krijgt hij 10 punten. Voor elke vraag die hij goed beantwoordt, maar niet binnen een minuut, krijgt hij 5 punten. Voor elke vraag die hij fout beantwoordt, krijgt hij 0 punten.
Na afloop van de wedstrijd blijkt dat van alle 480 antwoorden meer dan de helft goed is en binnen een minuut gegeven. Het aantal antwoorden dat goed is, maar niet binnen een minuut gegeven, blijkt gelijk te zijn aan het aantal foute antwoorden.
Laat zien dat er twee scholieren zijn die precies dezelfde totaalscore hebben gehaald.

Tweede ronde 2011, C2

Opgave 6.6.
Een regelmatige zeshoek is door lijnen evenwijdig aan de zijden in zeven stukken verdeeld zoals in de figuur. Vier van de stukken zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan de lengtes van de zijden in de figuur aangegeven zijn.
Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek?



Tweede ronde 2013, B5

Opgave 6.7.
Vind alle drietallen (x, y, z) van reële getallen waarvoor geldt dat

$$x + y - z \;=\; -1, \qquad x^2 - y^2 + z^2 \;=\; 1 \qquad \text{en} \qquad -x^3 + y^3 + z^3 \;=\; -1.$$

Finale 2013, opgave 2

HOOFDSTUK 7

Logisch redeneren

Olympiadeopgaven zijn vaak als doolhoven: waar er op school (bij het oplossen van een vergelijking) vaak een directe route naar de oplossing is, moet je bij een olympiadeopgave vaak een paar routes uitproberen en loop je soms een doodlopende gang in. Door logisch redeneren kun je snel bepaalde gangen afsluiten en de route naar de uitgang vinden.

Strategie

- Probeer eerst met redeneren zoveel mogelijk dingen te achterhalen die je zeker weet.
- Als je daarna vastzit omdat er nog meerdere mogelijkheden ergens voor zijn, probeer dan één voor één deze mogelijkheden uit. Dus kan een getal nog 3 of 5 zijn, neem dan eerst even aan dat het 3 is en probeer er dan verder uit te komen. Daarna hetzelfde met 5.
- Misschien blijken sommige mogelijkheden na een paar redeneerstappen tóch niet te kunnen. Dat ontdek je pas door zo'n mogelijkheid juist wel goed te onderzoeken.
- Vraagt de opgave bijvoorbeeld om *alle* getallen met een bepaalde eigenschap te bepalen? Stop dan niet als je er door proberen eentje gevonden hebt, maar zorg dat je alle mogelijkheden uitgeprobeerd hebt.

Voorbeeld.
Bepaal alle getallen $ABCDE$ (bestaande uit de cijfers A, B, C, D en E) waarvoor $4 \times ABCDE = EDCBA$. Hierbij staan gelijke letters voor gelijke cijfers.

Eerste ronde 1998, A6

Uitwerking.
Als het cijfer A heel groot zou zijn, zou $4 \times ABCDE$ uit meer dan vijf cijfers bestaan. Dit is al het geval als $A = 3$, want $4 \times 3 = 12$. Dus A moet 1 of 2 zijn. We proberen allebei deze mogelijkheden. Stel dat $A = 1$. Dan eindigt $4 \times E$ op een 1, maar dat kan niet, want $4 \times E$ is een even getal en moet dus op een even cijfer eindigen. Dus $A = 2$.

Nu is $4 \times A = 8$, dus $4 \times ABCDE$ begint met een 8 of een 9, afhankelijk van of er 1 moet worden 'onthouden'. Dus $E = 8$ of $E = 9$. Ook hier proberen we weer allebei de mogelijkheden. Stel dat $E = 9$. Dan eindigt $4 \times ABCDE$ op een 6, want $4 \times 9 = 36$. Maar het laatste cijfer is juist $A = 2$, dus dit kan niet. Dus $E = 8$.

Dat betekent ook dat er dus niet iets is 'onthouden', dus $4 \times BCDE$ bestaat uit vier cijfers. Dus $B = 1$ of $B = 2$. Als $B = 2$ zou $4 \times ABCDE = EDCBA$ eindigen op 22, maar de laatste twee cijfers van een viervoud moeten een viervoud zijn. De enige mogelijkheid is dus dat $B = 1$.

De vergelijking ziet er inmiddels als volgt uit: $4 \times 21CD8 = 8DC12$. Dus $4 \times D8$ moet eindigen op 12, terwijl $4 \times 8 = 32$. Dus $4 \times D$ moet eindigen op een 8. Dan moet D wel 2 of 7 zijn.

Als $D = 2$ wordt de vergelijking $4 \times 21C28 = 82C12$, maar het is duidelijk dat dit niet kan want $4 \times 21C28$ is groter dan 84000. Als $D = 7$ wordt de vergelijking $4 \times 21C78 = 87C12$, dus als we links en rechts $4 \times 21000 = 84000$ aftrekken, vinden we $4 \times C78 = 3C12$. We schrijven dit uit: $400C + 4 \times 78 = 3012 + 100C$, oftewel $300C = 3012 - 4 \times 78 = 2700$. Dus $C = 9$.

We concluderen dat $ABCDE = 21978$ de enige oplossing is. $\square$

Opgaven

Opgave 7.1.
Op de plaatsen van de sterretjes staan positieve gehele getallen op zo'n manier dat de vermenigvuldigingstabel hiernaast klopt.
Wat is het grootste getal dat meer dan één keer voorkomt in de 5×5-tabel?

×	∗	∗	∗	7
∗	24	∗	∗	56
∗	∗	36	8	∗
∗	∗	27	6	∗
6	18	∗	∗	42

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18

Eerste ronde 2012, A1

Opgave 7.2.
Aline, Bram en Cas doen mee aan een wiskundewedstrijd met 12 vragen. Vooraf zijn ze enigszins pessimistisch en doen ze de volgende uitspraken.

Aline: "Bram zal minstens twee vragen meer goed hebben dan ik."
Bram: "Ik zal niet meer dan vijf vragen goed hebben."
Cas: "Ik zal hoogstens zoveel vragen goed hebben als Aline."

Hun leraar probeert hun moed in te spreken en zegt: "Samen hebben jullie vast meer dan 18 vragen goed." Na afloop blijken zowel alle drie de leerlingen als hun leraar een foute voorspelling te hebben gedaan. Wie heeft/hebben het kleinste aantal vragen goed beantwoord?

A) alleen Aline B) alleen Bram C) alleen Cas
D) zowel Aline als Bram E) dat kun je niet met zekerheid zeggen

Eerste ronde 2011, A4

Opgave 7.3.
In deze optelsom staat elke letter voor een cijfer (0 tot en met 9). Verschillende letters staan voor verschillende cijfers.
Bepaal de waarde van W × R.

$$\begin{array}{r} \mathrm{T\ W\ E\ E\ D\ E} \\ \mathrm{R\ O\ N\ D\ E} + \\ \hline 2\ 3\ 0\ 3\ 1\ 2 \end{array}$$

Tweede ronde 2012, B1

Opgave 7.4.
Eén van de vier kabouters Anne, Bert, Chris en Dirk heeft goud gestolen van de koning. De kabouters, die elkaar door en door kennen, doen hierover elk twee uitspraken. Als een kabouter een leugenaar is, is minstens één van die twee uitspraken een leugen. Is een kabouter geen leugenaar, dan zijn beide uitspraken waar.

Anne zegt: "Bert is een leugenaar." en "Chris of Dirk heeft het gedaan."
Bert zegt: "Chris is een leugenaar." en "Dirk of Anne heeft het gedaan."
Chris zegt: "Dirk is een leugenaar." en "Anne of Bert heeft het gedaan."
Dirk zegt: "Anne is een leugenaar." en "Bert of Chris heeft het gedaan."

Hoeveel van deze acht uitspraken zijn waar?

Tweede ronde 2012, B3

Opgave 7.5.
Bepaal alle positieve gehele getallen n van vier cijfers waarvoor geldt dat n plus de som van de cijfers van n gelijk is aan 2010.

Tweede ronde 2010, C1

HOOFDSTUK 8

Goochelen met algebra

Bij een gegeven uitdrukking met één of meer variabelen kun je vaak slim goochelen met de uitdrukking om de gewenste vorm te krijgen.

Strategie

- Ga niet direct de vergelijking oplossen of een variabele elimineren; dat levert vaak heel veel rekenwerk op. Soms zelfs zoveel dat je de oplossing niet rond krijgt.
- Ga wel spelen met de gegeven uitdrukking. Haal eens wat termen naar een andere kant, zet links en rechts de breuken op z'n kop, deel links en rechts door hetzelfde, etc. Hoe mooier het wordt, hoe beter!
- De uitdrukking $a^2 - b^2$ komt vaak voor en kun je handig ontbinden als $(a-b)(a+b)$. Dit heet een merkwaardig product.

Voorbeeld.
Van twee reële getallen a en b ongelijk aan 0 is gegeven dat $ab = a - b$. Bepaal de waarde van $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

Uitwerking.
Door het gegeven links en rechts te delen door b, vinden we $a = \frac{a}{b} - 1$, dus $\frac{a}{b} = a + 1$. We kunnen ook juist delen door a, zodat we krijgen $b = 1 - \frac{b}{a}$, dus $\frac{b}{a} = 1 - b$. Al met al vinden we

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = (a+1) + (1-b) - (a-b) = 2.$$

□

Voorbeeld.
Bepaal alle paren (x, y) van positieve gehele getallen waarvoor geldt dat $x^2 = y^2 + 9$.

Uitwerking.
We halen de term y^2 naar links: $x^2 - y^2 = 9$. Nu staat links een merkwaardig product, dus we

kunnen ontbinden: $(x-y)(x+y)=9$. Nu is $x+y$ positief, dus $x-y$ moet ook positief zijn, anders is het product niet positief. Dus dit product kan 1×9, 3×3 of 9×1 zijn. De laatste twee vallen af omdat $x+y$ groter moet zijn dan $x-y$. Dus $x-y=1$ en $x+y=9$. Optellen van deze twee vergelijkingen geeft $2x=(x-y)+(x+y)=10$, dus $x=5$. En dan berekenen we $y=4$. Dus $(x,y)=(5,4)$ is de enige oplossing. □

Opgaven

Opgave 8.1.
Voor het getal x geldt: $x=\dfrac{1}{1+x}$. Bereken $x-\dfrac{1}{x}$. Vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk.

Eerste ronde 2011, B1

Opgave 8.2.
Voor een getal x geldt dat $x+\frac{1}{x}=5$. We definiëren $n=x^3+\frac{1}{x^3}$. Het blijkt dat n een geheel getal is.
Bereken n. (Schrijf n in gewone decimale notatie.)

Eerste ronde 2008, B3

Opgave 8.3.
We noemen een drietal (x,y,z) *goed* als x, y en z positieve gehele getallen zijn met $y\geqslant 2$ en er bovendien geldt dat $x^2-3y^2=z^2-3$.
Een voorbeeld van een goed drietal is $(19,6,16)$, want er geldt: $6\geqslant 2$ en $19^2-3\cdot 6^2=16^2-3$.
Vind een goed drietal (x,y,z) waarbij x *even* is.

Tweede ronde 2013, C2(b)

Opgave 8.4.
Bepaal alle positieve gehele getallen m waarvoor geldt dat zowel $m-110$ als $m+110$ het kwadraat van een geheel getal is.

Voorbeeldopgaven tweede ronde 2010, C2

HOOFDSTUK 9

Gelijkvormigheid

Twee figuren zijn gelijkvormig als de één een vergroting of verkleining van de ander is. In het geval van twee driehoeken geldt dat ze gelijkvormig zijn als ze twee paren hoeken hetzelfde hebben. Dit kom je onder andere tegen in zandloper- en snavelfiguren (met evenwijdigen lijnen).

Strategie

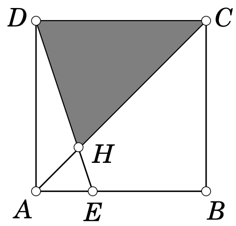
- Probeer gelijkvormige driehoeken in het plaatje te vinden.
- Gebruik een verhoudingstabel om met de gelijkvormigheid te rekenen. Bijvoorbeeld bij driehoeken ABC en XYZ waar hoeken A en X gelijk zijn en hoeken B en Y (en automatisch dan ook hoeken C en Z) krijg je

AB	BC	CA
XY	YZ	ZX

- Ook een hoogtelijn (of zwaartelijn) uit A en een hoogtelijn (of zwaartelijn) uit X hebben weer dezelfde verhouding.
- Als van twee gelijkvormige figuren de zijdelengtes van de één een factor f keer zo groot zijn als die van de ander, is de oppervlakte van die eerste figuur f^2 keer zo groot als de oppervlakte van de tweede.

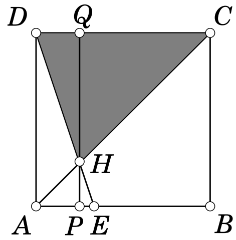
Voorbeeld.
Op de zijde AB van een vierkant $ABCD$ met $|AB| = 3$ ligt een punt E zo dat $|AE| = 1$ en $|EB| = 2$. De lijnen AC en DE snijden elkaar in het punt H. Hoe groot is de oppervlakte van driehoek CDH?

A) $\frac{9}{8}$ B) 2 C) $\frac{21}{8}$ D) 3 E) $\frac{27}{8}$



Eerste ronde 2008, A6

Uitwerking.



Omdat AE evenwijdig is aan CD zijn driehoeken AEH en CDH gelijkvormig (zandloperfiguur). Om iets over de oppervlakte van driehoek CDH te kunnen zeggen, trekken we een hoogtelijn vanuit H met voetpunt Q op CD. Als we deze lijn de andere kant op doortrekken, wordt het juist een hoogtelijn in driehoek AEH met voetpunt P op AE. Omdat de driehoeken gelijkvormig zijn met een factor $|AE| : |CD| = 1 : 3$, geldt ook voor de hoogtelijnen dat $|HP| : |HQ| = 1 : 3$. Dus $|HQ| : |PQ| = 3 : 4$ omdat $|PQ| = |HP| + |HQ|$. Omdat $ABCD$ een vierkant is en PQ evenwijdig aan één van de zijden loopt, is $|PQ| = |AD| = |AB| = 3$. Dus $|HQ| = \frac{3}{4} \times |PQ| = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$. De oppervlakte van driehoek CDH is dus $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$. □

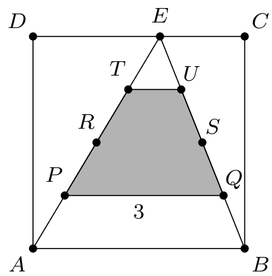
Opgaven

Opgave 9.1.

Op zijde CD van een vierkant $ABCD$ ligt een punt E. Lijnstuk AE wordt door de punten P, R en T in vier gelijke stukken verdeeld. Lijnstuk BE wordt door de punten Q, S en U in vier gelijke stukken verdeeld. Gegeven is dat $|PQ| = 3$.

Wat is de oppervlakte van vierhoek $PQUT$?

A) $\frac{15}{4}$ B) 4 C) $\frac{17}{4}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 5

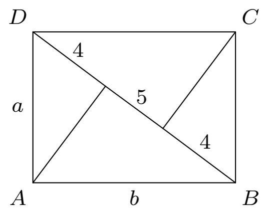


Eerste ronde 2012, A6

Opgave 9.2.

Een rechthoek $ABCD$ heeft zijden a en b, waarbij $a < b$. De loodlijnen uit A en C op de diagonaal BD verdelen die diagonaal in drie stukken met lengtes 4, 5 en 4.

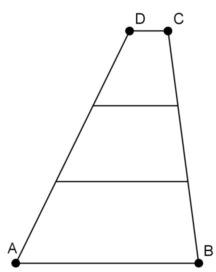
Bereken $\frac{b}{a}$.



Eerste ronde 2013, B2

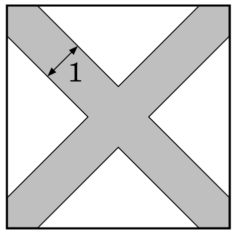
Opgave 9.3.

Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met zijden $|AB| = 16$, $|BC| = 21$, $|CD| = 2$ en $|DA| = 28$. Verder is AB evenwijdig met CD. Twee lijnen die evenwijdig zijn met AB en CD verdelen vierhoek $ABCD$ in drie gelijkvormige vierhoeken. Bereken de omtrek van de kleinste van die drie vierhoeken.



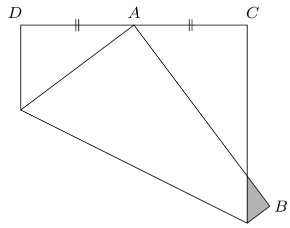
Eerste ronde 2007, B2

Opgave 9.4.
Met een brede kwast worden de diagonalen van een vierkante tegel geverfd, zie de figuur. Precies de helft van het oppervlak van de tegel is geverfd. De breedte van de verfkwast is 1, zoals aangegeven. Bereken de lengte van de zijde van de tegel.



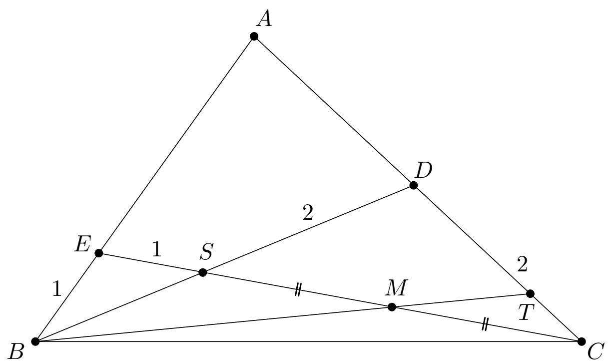
Eerste ronde 2009, B3

Opgave 9.5.
Een vierkant $ABCD$ met zijde 8 wordt zodanig gevouwen dat hoekpunt A met het midden van CD samenvalt (zie figuur).
Wat is de oppervlakte van het grijze driehoekje?



Tweede ronde 2012, B5

Opgave 9.6.
Gegeven is een driehoek ABC met op lijnstuk AC een punt D en op lijnstuk AB een punt E. Het snijpunt van BD en CE noemen we S. Het midden van lijnstuk CS noemen we M. De lijn BM snijdt lijnstuk CD in punt T. Ten slotte is gegeven dat $|BE| = |ES| = 1$ en $|CD| = |DS| = 2$.
Bewijs dat $|AB| = |AT|$.



Tweede ronde 2012, C2

HOOFDSTUK 10

Blikwisseling

Voorbeeld.
Neem alle getallen van vier cijfers waarin elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies eenmaal voorkomt. Wat is het gemiddelde van al deze getallen?

Junior Wiskunde Olympiade 2010, deel II opgave 4

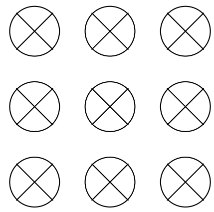
Uitwerking.
We maken in gedachten een lijst van al deze getallen. Het aantal getallen dat op een 1 eindigt is gelijk aan het aantal getallen dat op een 2 eindigt, en gelijk aan het aantal getallen dat op een 3 eindigt, en gelijk aan het aantal getallen dat op een 4 eindigt. Dus een kwart van de getallen eindigt op een 1, een kwart op een 2, een kwart op een 3 en een kwart op een 4. Gemiddeld is het laatste cijfer dus $\frac{1+2+3+4}{4} = 2\frac{1}{2}$. Precies hetzelfde geldt natuurlijk voor de cijfers op elk van de andere drie posities. Dus de gemiddelde bijdrage aan de tientallen is 25, die aan de hondertallen 250 en die aan de duizendtallen 2500. Het gemiddelde van alle getallen in de lijst is dus $2500 + 250 + 25 + 2\frac{1}{2} = 2777\frac{1}{2}$. □

Wat gebeurt hier nu eigenlijk? Een getal bestaat uit vier cijfers en van al deze getallen moeten we het gemiddelde nemen. Maar in plaats daarvan nemen we het gemiddelde van elk van de cijfers en maken we daar uiteindelijk weer één getal van. We hebben dus op een slimme andere manier naar het probleem gekeken.

Strategie

- Als je een aantal getallen moet optellen (of er het gemiddelde van moet nemen), bekijk het dan per cijfer.
- Ook bij andere situaties kan gelden: maak op een of andere manier een lange lijst van dingen (getallen, acties, ...) en bekijk die lijst dan per kolom (verticaal). Zie ook het tweede voorbeeld.

Voorbeeld.
Negen lampjes zijn in een vierkant opgesteld. Elk lampje kan *aan* of *uit* zijn. Als je op een lampje drukt, veranderen dat lampje en de lampjes in dezelfde rij of kolom van toestand: van *aan* naar *uit* of omgekeerd. In het begin zijn alle lampjes *aan*.
Wat is het kleinste aantal keren drukken dat nodig is om alle lampjes *uit* te krijgen?



Eerste ronde 2013, A4

Uitwerking.
We maken een lijst met als kolommen de negen lampjes. Als we op een lampje drukken, vullen we een regel van deze lijst in met kruisjes bij de lampjes die van toestand veranderen. Elk lampje moet van aan naar uit, dus hij moet een oneven aantal keer van toestand veranderen. De volgorde waarin dit gebeurt, maakt niet uit. Omdat het aantal lampjes (aantal kolommen) ook oneven is, moet het totaal aantal kruisjes in de lijst dus oneven zijn. Daarnaast moet het natuurlijk minstens 9 zijn. Per keer veranderen vijf lampjes van toestand, dus komen er vijf kruisjes bij in de lijst. Na één keer zitten we pas op 5 en dat is nog geen 9; na twee keer zitten we op 10, maar dat is even; na drie keer zitten we op 15 en dat zou wel kunnen.

Door de drie lampjes in de bovenste rij in te drukken, veranderen alle lampjes van *aan* naar *uit*. De lampjes in de bovenste rij veranderen namelijk driemaal van toestand en de overige lampjes precies éénmaal. Dus het kan inderdaad met drie keer drukken en dat is het minimale aantal. $\square$

Opgaven

Opgave 10.1.
Op een feestje zijn 33 mensen. Sommige mensen schudden handen met elkaar om elkaar te begroeten, anderen niet. We vragen aan elke feestganger aan het eind van het feestje hoeveel handen hij of zij heeft geschud. Al deze getallen tellen we bij elkaar op. Is dit antwoord even of oneven, of kun je dit niet weten?

Opgave 10.2.
Een digitale klok geeft in de loop van een dag de tijden 00:00:00 t/m 23:59:59 aan. Iedere seconde van de dag kun je de cijfers optellen en zo ontstaat er steeds een geheel getal. Om 13:07:14 is die som bijvoorbeeld $1 + 3 + 0 + 7 + 1 + 4 = 16$. Wanneer je zo voor iedere mogelijke stand van de klok de som opschrijft en daarna van al deze getallen het gemiddelde neemt, wat is dan de uitkomst?

Tweede ronde 2010, B3

Opgave 10.3.
Twintig leerlingen hebben een toets gemaakt. Geen twee leerlingen hebben hetzelfde aantal vragen goed beantwoord. Elke vraag was door hoogstens drie leerlingen goed beantwoord.
Wat is het kleinste aantal vragen dat de toets kan hebben?

A) 63 B) 64 C) 67 D) 70 E) 71

Eerste ronde 2013, A8

Opgave 10.4.
Zowel de rijen als de kolommen van een 8×8-schaakbord zijn genummerd van 1 t/m 8. Op elk veld van het schaakbord wordt een aantal graankorrels gelegd dat gelijk is aan het product van het rijnummer en het kolomnummer.
Hoeveel graankorrels liggen er in totaal op het schaakbord?

Eerste ronde 2008, B1

Opgave 10.5.
Raymond heeft vijf muntjes. Op de kopzijde van elke munt staat het getal 1. Op de muntzijde staan respectievelijk de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{6}$. Omdat elke munt ofwel met kop ofwel met munt boven ligt, zijn er 32 manieren om de vijf muntjes op tafel te leggen. Voor elk van deze 32 manieren vermenigvuldigt Raymond de vijf getallen die boven liggen met elkaar en schrijft hij het resultaat op.
Als Raymond ten slotte deze 32 getallen bij elkaar optelt, wat is dan de uitkomst?

Tweede ronde 2010, B5

Deel II

Uitwerkingen

HOOFDSTUK 1

Patroon herkennen – Uitwerkingen

Opgave 1.1.
Wat zijn de laatste vier cijfers van 5^{2013}?

A) 0625 B) 2525 C) 3125 D) 5625 E) 8125

Eerste ronde 2013, A7

Antwoord: C) 3125
Uitwerking: We bekijken de laatste vier cijfers van de machten van 5:

$$\begin{array}{rclcrcr} 5^1 & = & 0005 & \quad & 5^5 & = & 3125 \\ 5^2 & = & 0025 & & 5^6 & = & 15625 \\ 5^3 & = & 0125 & & 5^7 & = & 78125 \\ 5^4 & = & 0625 & & 5^8 & = & 390625 \end{array}$$

Bij het berekenen van de laatste vier cijfers van een macht van 5, is het voldoende om de laatste vier cijfers van de vorige macht van 5 te weten. Zo zijn de laatste vier cijfers van 5×390625 en van 5×0625 gelijk, namelijk 3125. Omdat de laatste vier cijfers van 5^4 en 5^8 gelijk zijn, zullen de laatste vier cijfers van de machten van 5 zich vanaf daar elke vier stappen herhalen. De laatste vier cijfers van 5^{2013} zijn dus gelijk aan die van 5^{2009} en van 5^{2005}, enzovoorts tot en met die van $5^5 = 3125$. De laatste vier cijfers zijn dus 3125. □

Opgave 1.2.
We bekijken een rij getallen die met $27, 1, 2012, \ldots$ begint. Voor deze rij getallen geldt het volgende. Als we de getallen op plek 1, 2 en 3 in de rij optellen, krijgen we 2040. Van de getallen op plek 2, 3 en 4 is de som 2039 en van de getallen op plek 3, 4 en 5 is de som 2038, enzovoorts. Algemeen geldt dus: de getallen op plek k, $k+1$ en $k+2$ samen zijn $2041 - k$.
Welk getal staat er op plek 2013 in de rij?

A) -670 B) -669 C) 670 D) 1341 E) 1342

Eerste ronde 2012, A8

Antwoord: E) 1342
Uitwerking: We schrijven de rij een stuk uit:

$$27, 1, 2012, 26, 0, 2011, 25, -1, 2010, 24, -2, 2009, \ldots$$

Het valt op dat als je in de rij drie posities verder gaat, je een getal vindt dat 1 kleiner is dan het getal waar je begon. We kunnen dit ook beargumentere: als a, b, c, d vier opeenvolgende getallen in de rij zijn, dan is $b+c+d$ precies 1 kleiner dan $a+b+c$, dus $b+c+d = a+b+c-1$, dus $d = a-1$. De getallen op posities $3, 6, 9, \ldots, 2013$ $(= 3+3\times670)$ zijn dus precies $2012, 2011, \ldots$, $(2012-670 =)$ 1342. □

Opgave 1.3.
Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999\ldots99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal?

Eerste ronde 2009, B2

Antwoord: 4017
Uitwerking: We berekenen $9^3 = 729$; $99^3 = 970299$; $999^3 = 997002999$. Het lijkt erop dat in het algemeen de derde macht van het getal n bestaande uit k negens er als volgt uit ziet: eerst $k-1$ negens; dan een 7; dan $k-1$ nullen; dan een 2; en ten slotte k negens. Om dat te bewijzen, schrijven we n als 10^k-1. Inderdaad: $(10^k-1)^3 = 10^{3k}-3\cdot10^{2k}+3\cdot10^k-1 = 10^{2k}(10^k-3)+(3\cdot10^k-1)$. Het getal 10^k-3 kun je uitschrijven als $999\ldots997$ met $k-1$ negens. Vermenigvuldigd met 10^{2k} levert dat een getal met $2k$ nullen op het eind. Als we daar $3\cdot10^k-1$ bij optellen, worden de laatste $k+1$ nullen vervangen door $2999\ldots999$ met k negens. In totaal gaat het dan dus om $(k-1)+k$ negens; voor $k = 2009$ zijn dat er 4017. □

Opgave 1.4.
We hebben 10.000 kaarten genummerd van 1 tot en met 10.000. We doen steeds de volgende stap: we halen alle kaarten weg waarop een kwadraat staat en we hernummeren de overgebleven kaarten weer opeenvolgend vanaf 1.
Na hoeveel stappen hebben we nog maar één kaart over?

Tweede ronde 2011, B4

Antwoord: 198
Uitwerking: Omdat het in de opgave over kwadraten gaat, is het misschien relevant dat 10.000 een kwadraat is. We proberen het nu eerst met een kleiner kwadraat: 100 kaarten.

- De eerste keer halen we de kaarten genummerd 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 weg. Dat zijn er 10, dus er blijven 90 kaarten over.
- De tweede keer halen we de kaarten genummerd 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 weg. Dat zijn er 9, dus er blijven 81 kaarten over.
- De derde keer halen we de kaarten genummerd 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 weg. Dat zijn er 9, dus er blijven 72 kaarten over.
- De vierde keer halen we de kaarten genummerd 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 weg. Dat zijn er 8, dus er blijven 64 kaarten over.
- De vijfde keer halen we de kaarten genummerd 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 weg. Dat zijn er 8, dus er blijven 56 kaarten over.
- De zesde keer halen we de kaarten genummerd 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 weg. Dat zijn er 7, dus er blijven 49 kaarten over.

Het valt nu op dat we elke keer na twee stappen een kwadraat aantal kaarten over hebben: na twee stappen nog 9^2 kaarten, na vier stappen nog 8^2 kaarten, enzovoorts. Na 18 stappen hebben we dus nog $1^2 = 1$ kaart over. Nu weten we genoeg om het probleem met 10.000 kaarten aan te kunnen pakken. De eerste keer halen we de kaarten genummerd 1^2, 2^2, 3^2, $\ldots$, 100^2 weg. Er blijven dan nog 9900 kaarten over. Omdat $99^2 \leqslant 9900 < 100^2$, halen we in de tweede stap 1^2, $2^2, \ldots, 99^2$ weg. Daarna zijn er nog $9900 - 99 = 9801 = 99^2$ kaarten over, precies een kwadraat.

In het algemeen geldt dat als we beginnen met n^2 kaarten, waarbij $n \geqslant 2$, we in de eerste stap n kaarten weghalen en er $n^2 - n$ kaarten overblijven. Omdat $(n-1)^2 \leqslant n^2 - n < n^2$, halen we in de volgende stap $n - 1$ kaarten weg, waarna er precies $(n^2 - n) - (n - 1) = (n - 1)^2$ kaarten overblijven. In twee stappen gaan we dus van n^2 kaarten naar $(n - 1)^2$ kaarten. We hebben daarom $2 \cdot 99 = 198$ stappen nodig om van 100^2 kaarten naar 1 kaart te gaan. □

Opgave 1.5.
Op elk van de 10.000 velden van een 100×100-schaakbord staat een getal. Op de bovenste rij staan van links naar rechts de getallen 0 tot en met 99. In de linkerkolom staan van boven naar beneden de getallen 0 tot en met 99. De som van vier getallen in een 2×2-blokje is altijd 20. Welk getal staat helemaal rechtsonder op het bord?

Tweede ronde 2012, B4

Antwoord: -178
Uitwerking: We rekenen een aantal getallen van het bord uit, te beginnen linksboven:

0	1	2	3	4	$\cdots$
1	18	-1	16	-3	$\cdots$
2	-1	4	1	6	$\cdots$
3	16	1	14	-1	$\cdots$
4	-3	6	-1	8	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Wat opvalt is dat als we twee posities naar rechts of naar beneden gaan, het getal steeds 2 kleiner of 2 groter wordt, afhankelijk van of je in een even of oneven rij of kolom zit. Hiermee zouden we al kunnen uitrekenen wat er rechtsonderin komt, maar we bewijzen nu eerst nog dat het patroon zich echt voortzet. Bekijk twee 2×2-vierkantjes boven elkaar, waarbij twee getallen overlappen. De vier getallen in elk van de vierkantjes zijn samen 20, dus de twee bovenste getallen en de twee onderste getallen hebben dezelfde som (namelijk 20 min de som van de twee overlappende getallen). Noem de twee bovenste getallen a en b en de twee onderste c en d. Dan geldt dus $a + b = c + d$. Dus als c precies 2 groter is dan a, dan moet d juist precies 2 kleiner zijn dan b. Dus wat er van a naar c bij komt, gaat er van b naar d juist af. In de kolom daar weer naast gaat hetzelfde er dan juist weer bij, enzovoorts. Bekijk wat er gebeurt als we van een getal in de tweede rij naar een getal in de vierde rij springen: wat er in de eerste kolom bij komt, gaat er in de tweede kolom juist af. En zo ook als we van de vierde rij naar de zesde rij gaan, enzovoorts. In de eerste kolom weten we dat het honderdste getal precies 98 groter is dan het tweede getal, dus in de tweede kolom is het honderdste getal juist 98 kleiner, dus dat getal is $18 - 98 = -80$. Nu kunnen we hetzelfde horizontaal doen: we springen van de tweede kolom naar de vierde kolom; wat er in de eerste rij bij komt, gaat er in de tweede rij af, in de derde rij weer bij, ..., in de honderdste rij weer af. Van de tweede kolom naar de honderdste kolom komt er in de eerste rij 98 bij, dus in de honderdste rij gaat er juist 98 af. Het getal helemaal rechtsonderin wordt dus $-80 - 98 = -178$. □

Opgave 1.6.
De oneindige rij getallen

$$0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1, -1, -2, -1,\ 1,\ 3,\ \ldots$$

voldoet aan de volgende regel. Voor elk viertal opeenvolgende getallen $\ldots, a, b, c, d, \ldots$ uit de rij geldt steeds dat d gelijk is aan c min het kleinste van de twee getallen a en b. Zo is het negende getal uit de rij gelijk aan $-1-(-2)=1$ en het tiende getal gelijk aan $1-(-2)=3$. Bereken het 100-ste getal uit de rij.

Tweede ronde 2010, B4

Antwoord: 2187
Uitwerking: Met een klein beetje rekenwerk vinden we wat meer getallen uit de rij:

$$\begin{array}{lllllllllllllll} 0, & 1, & 2, & 2, & 1, & -1, & -2, & -1, & 1, & 3, & 4, & 3, & 0, & -3, & -3, \\ 0, & 3, & 6, & 6, & 3, & -3, & \ldots \end{array}$$

We zien een duidelijk patroon: na vijftien termen herhaalt de rij zich, alleen dan met alle termen driemaal zo groot. Dat de rij dit patroon inderdaad blijft volgen, kun je als volgt inzien. Elk getal in de rij wordt bepaald door zijn drie voorgangers. Stel nu dat drie opeenvolgende getallen uit de rij a, b, c zich vijftien posities verder herhalen, maar dan vermenigvuldigd met een factor 3:

$$\ldots, a, b, c, d, \ldots, 3a, 3b, 3c, \ldots$$

Het getal dat volgt na $3a, 3b, 3c$ is (per definitie) gelijk aan $3c$ min de kleinste van $3a$ en $3b$. Dat is precies driemaal zoveel als: c min de kleinste van a en b. Oftewel: dat is precies driemaal zoveel als d. Als drie opeenvolgende getallen uit de rij zich vijftien posities verder herhalen (met een factor 3), geldt dit dus automatisch ook voor het volgende getal, en daarmee ook voor het getal daarna, etcetera.

Met de gevonden regelmaat zien we dat het honderdste getal gelijk is aan het tiende getal (3), maar dan $\frac{90}{15}=6$ keer vermenigvuldigd met 3. Dat levert op: $3\cdot 3^6=2187$. □

Opgave 1.7.
Op een bord met 28 rijen en 37 kolommen wordt in elk vakje met een rode pen een getal geschreven: in de bovenste rij van links naar rechts de getallen 1 tot en met 37, in de rij eronder van links naar rechts de getallen 38 tot en met 74, enzovoorts.
Met een groene pen wordt daarna opnieuw in elk vakje een getal geschreven, maar nu komen de getallen 1 tot en met 28 van boven naar beneden in de linker kolom, in de kolom ernaast van boven naar beneden de getallen 29 tot en met 56, enzovoorts.
In het vakje linksboven staat nu zowel in rood als in groen het getal 1. Tel de rode getallen op, van alle vakjes waar in rood en groen hetzelfde getal staat. Wat is de uitkomst?

Eerste ronde 2010, B4

Antwoord: 5185
Uitwerking: We proberen een paar kleinere borden met hetzelfde systeem te vullen. We zetten het rode getal linksboven en het groene getal rechtsonder in elk hokje.

1 1	2 3	3 5
4 2	5 4	6 6

1 1	2 4	3 7
4 2	5 5	6 8
7 3	8 6	9 9

1 1	2 4	3 7	4 10	5 13
6 2	7 5	8 8	9 11	10 14
11 3	12 6	13 9	14 12	15 15

Wat opvalt is dat in elk geval het hokje linksboven en rechtsonder altijd twee dezelfde getallen staan en daarnaast soms ook nog in een hokje daartussen. Dat lijkt te gebeuren precies als zo'n hokje netjes op de rechte lijn van linksboven naar rechtsonder ligt.

We nummeren de rijen van boven naar onder 0 tot en met 27 en de kolommen van links naar rechts 0 tot en met 36. Bekijk het vakje in rij r en kolom k. Het rode getal is hier $1 + k + 37r$ en het groene getal is $1 + r + 28k$. Deze twee getallen zijn aan elkaar gelijk precies wanneer $36r = 27k$ oftewel als $4r = 3k$. De oplossingen krijg je door voor r de drievouden $0, 3, \ldots, 27$ te nemen en voor k de bijbehorende viervouden $0, 4, \ldots, 36$. De bijbehorende gekleurde getallen zijn $1, 1 + 115, 1 + 2 \cdot 115, \ldots, 1 + 9 \cdot 115$. Optellen van deze tien getallen geeft het antwoord: $(1 + (1 + 9 \cdot 115)) \cdot 5 = 5185$. ☐

Opgave 1.8.
We noemen een drietal (x, y, z) *goed* als x, y en z positieve gehele getallen zijn met $y \geqslant 2$ en er bovendien geldt dat $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.
Een voorbeeld van een goed drietal is $(19, 6, 16)$, want er geldt: $6 \geqslant 2$ en $19^2 - 3 \cdot 6^2 = 16^2 - 3$.
Laat zien dat er voor elk *oneven* getal $x \geqslant 5$ minstens twee goede drietallen (x, y, z) bestaan.

Tweede ronde 2013, C2(a)

Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: We gaan op zoek naar voorbeelden van goede drietallen. Dat gaat in grote lijnen als volgt. Vul eerst $x = 5$ in. Dan zie je dat z niet groter dan 5 kan zijn. Als z gelijk is aan 5, is $y = 1$ en dat mag ook niet, dus z moet zelfs kleiner dan 5 zijn. Je kunt nu de waarden 1 tot en met 4 voor z proberen en de bijbehorende y uitrekenen, als die bestaat. Zo vind je twee goede drietallen bij $x = 5$: $(5, 3, 1)$ en $(5, 2, 4)$. Door hetzelfde te doen voor $x = 7$ vind je ook goede drietallen: $(7, 4, 2)$ en $(7, 3, 5)$. En voor $x = 9$: $(9, 5, 3)$ en $(9, 4, 6)$. Als we steeds het eerste goede drietal van de twee nemen en die bij elkaar zetten, zien we een duidelijk patroon: als x met 2 toeneemt, dan neem y met 1 toe en z ook met 1. Zo kunnen we een algemene formule gokken voor deze goede drietallen: noem $x = 2n + 1$ met $n \geqslant 2$ (zodat $x \geqslant 5$), dan lijkt het drietal $(2n + 1, n + 1, n - 1)$ goed te zijn. En zo ook vinden we voor de andere serie drietallen (steeds de tweede) de formule $(2n + 1, n, n + 2)$. Deze twee families van drietallen gaan we controleren.

Het is duidelijk dat in beide gevallen geldt dat y en z inderdaad positieve gehele getallen zijn en dat $y \geqslant 2$. Dat het inderdaad oplossingen zijn van de gegeven vergelijking volgt uit

$$(2n + 1)^2 - 3(n + 1)^2 = n^2 - 2n - 2 = (n - 1)^2 - 3 \quad \text{en}$$
$$(2n + 1)^2 - 3n^2 = n^2 + 4n + 1 = (n + 2)^2 - 3.$$

Hiermee is de opgave opgelost. ☐

HOOFDSTUK 2

Systematisch proberen en tellen – Uitwerkingen

Opgave 2.1.
Een verkeerslicht staat om en om een bepaalde tijd op groen en op rood. De periodes groen en rood duren even lang, allebei steeds 1, 2 of 3 minuten. Er zijn vier kleurcombinaties voor het licht op de tijdstippen 12:08 en 12:09: rood–rood, rood–groen, groen–rood en groen–groen. Hoeveel van de vier combinaties zijn mogelijk als gegeven is dat het licht om (precies) 12:05 op rood stond en om (precies) 12:12 ook op rood?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Het licht kan niet op zowel 12:05 als 12:12 rood zijn.

Eerste ronde 2013, A1

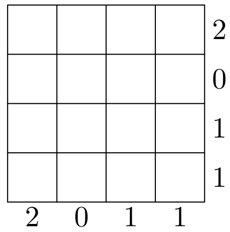
Antwoord: B) 2
Uitwerking: Gegeven is dat het stoplicht rood is op 12:05. Voor een stoplicht van periode 1 liggen de kleuren voor de tijdstippen 12:05 t/m 12:12 dan vast, die zijn afwisselend rood en groen. Voor periode 2 zijn er twee mogelijkheden en voor periode 3 zijn er drie mogelijkheden:

periode	12:05	12:06	12:07	12:08	12:09	12:10	12:11	12:12
1 min	rood	groen	rood	groen	rood	groen	rood	groen
2 min	rood	rood	groen	groen	rood	rood	groen	groen
2 min	rood	groen	groen	**rood**	**rood**	groen	groen	rood
3 min	rood	rood	rood	**groen**	**groen**	groen	rood	rood
3 min	rood	rood	groen	**groen**	**groen**	rood	rood	rood
3 min	rood	groen	groen	groen	rood	rood	rood	groen

Van deze zes mogelijkheden voldoen er drie aan de voorwaarde dat het licht rood is op 12:12. Voor de tijdstippen 12:08 en 12:09 geeft dit twee kleurcombinaties: rood–rood en groen–groen.
□

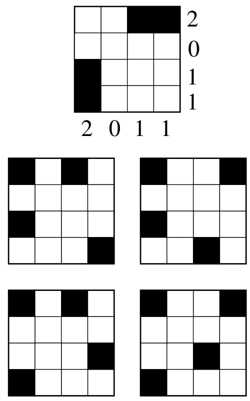
Opgave 2.2.
De velden van een 4×4-bord worden wit of zwart gekleurd. Naast elke rij en onder elke kolom staat aangegeven hoeveel velden in die rij of kolom zwart moeten zijn.
Op hoeveel manieren kan het bord gekleurd worden?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 8



Eerste ronde 2011, A1

Antwoord: D) 5
Uitwerking: Merk eerst op dat alle vakjes in de tweede rij en in de tweede kolom wit gekleurd moeten zijn. We bekijken twee gevallen, afhankelijk van de kleur van het vakje linksboven.
Als dit vakje wit is, moeten de laatste twee vakjes in de eerste rij en kolom zwart zijn. Dit legt de kleuring vast. Zie de bovenste figuur.
Als dit vakje zwart is, moet in de eerste kolom en in de eerste rij elk nog één vakje zwart gekleurd worden. Voor elk van de $2 \times 2 = 4$ keuzes is er precies één oplossing. Er is dan namelijk nog één rij en één kolom die een zwart vakje mist. Het vakje in die rij en kolom moet dus zwart worden en de rest wit, zie de onderste vier figuren. □



Opgave 2.3.
Wat is het kleinste positieve gehele getal bestaande uit de cijfers 2, 4 en 8, waarbij elk van deze cijfers minstens twee keer voorkomt en het getal niet deelbaar is door 4?

Eerste ronde 2013, B1

Antwoord: 244882
Uitwerking: We gaan eerst uitzoeken hoe getallen eruit zien die alleen de cijfers 2, 4 en 8 bevatten en niet deelbaar zijn door 4. Omdat alle cijfers even zijn, is het getal altijd een veelvoud van 20 plus zijn laatste cijfer. Als het getal eindigt op cijfer 4 of 8, dan is het getal een veelvoud van 20 plus 4 of 8 en dus deelbaar door 4. Als zo'n getal eindigt op cijfer 2, dan is het een veelvoud van 20 plus 2 en dus niet deelbaar door 4. Het laatste cijfer moet dus een 2 zijn. We zoeken dus het kleinste getal bestaande uit minstens twee keer 2, minstens twee keer 4 en minstens twee keer 8 dat op een 2 eindigt. We vinden dan 244882. □

Opgave 2.4.
We bekijken alle getallen van vijf cijfers. Hiervan zijn er a met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 25, en b met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 15.
Bepaal $\frac{a}{b}$.

Eerste ronde 2012, B1

Antwoord: $\frac{1}{2}$
Uitwerking: De getallen waarvan het product van de cijfers 25 is bestaan uit twee vijven en drie enen. Het aantal hiervan, a, is gelijk aan het aantal manieren om de drie enen te plaatsen. Er is dan namelijk maar één manier om de twee vijven te plaatsen.
De getallen waarvan het product van de cijfers 15 is bestaan uit een drie, een vijf en drie enen. Het aantal hiervan, b, is gelijk aan het aantal manieren om eerst de drie enen te plaatsen en om vervolgens op twee manieren de drie en de vijf te plaatsen.
Er geldt dus dat $b = 2a$, zodat $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. □

Opgave 2.5.
Zes padvinders gaan op speurtocht. Op zaterdag gaan ze naar het bos en op zondag gaan ze de bergen in. Op beide dagen moeten ze in tweetallen hun weg vinden. Hun leider wil ze voor elk van beide tochten in paren verdelen, zó dat niemand op de tweede dag dezelfde partner heeft als op de eerste dag. Op hoeveel manieren kan hij dat doen?

Eerste ronde 2011, B3

Antwoord: 120
Uitwerking: Noem de oudste padvinder A. Er zijn 5 mogelijkheden om voor hem een partner B te vinden voor de eerste dag. Vervolgens zijn er 4 mogelijke partners C voor B op de tweede dag, want hij mag niet opnieuw met A gaan. Voor C zijn er nog 3 mogelijke partners D voor de eerste dag, want hij mag niet tweemaal met B, en A is al bezet. Voor D zijn er daarna nog 2 mogelijke partners E voor de tweede dag, want B en C zijn al bezet en A kan zijn partner niet zijn omdat er dan twee padvinders overblijven die op beide dagen een paar vormen. Ten slotte is er nog 1 padvinder over die geen keuze heeft en op de eerste dag met E meegaat en op de tweede dag met A. In totaal zijn er dus $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ mogelijkheden. □

Opgave 2.6.
We schrijven de getallen 1 tot en met 30 000 achter elkaar op zodat een lange rij cijfers ontstaat:

$$123456789101112\ldots30000.$$

Hoe vaak komt 2013 in deze rij voor?

Eerste ronde 2013, B4

Antwoord: 25 keer
Uitwerking: De combinatie “2013” komt 13 keer voor als onderdeel van een van de volgende getallen: 2013, 12013, 22013 en 20130 t/m 20139. Daarnaast komt “2013” ook voor als eind van een getal gevolgd door het begin van het volgende getal. De verschillende mogelijke splitsingen zijn:

2|013 komt niet voor, want geen getal begint met een ‘0’.

20|13 komt 11 keer voor: 1320|1321 en 13020|13021 t/m 13920|13921.

201|3 komt slechts 1 keer voor: 3201|3202, want we noteren geen getallen groter dan 30 000.

Het is makkelijk na te gaan dat “2013” niet voorkomt als combinatie van drie opeenvolgende getallen. In totaal komt “2013” dus $13 + 11 + 1 = 25$ keer in de cijferrij voor. □

Opgave 2.7.
Bepaal alle drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen met de volgende eigenschappen:

- er geldt $a < b < c$ en a, b en c zijn drie opeenvolgende oneven getallen;
- het getal $a^2 + b^2 + c^2$ bestaat uit vier gelijke cijfers.

Tweede ronde 2011, C1

Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: Omdat a, b en c opeenvolgende positieve oneven getallen zijn, kunnen we schrijven: $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ en $c = 2n + 3$, met n een positief geheel getal.

Nu berekenen we:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2 \\ &= (4n^2-4n+1)+(4n^2+4n+1)+(4n^2+12n+9) \\ &= 12n^2+12n+11. \end{aligned}$$

Dit moet gelijk zijn aan een getal dat bestaat uit vier keer het cijfer p. Het getal $12n^2+12n$ bestaat dus uit vier cijfers waarvan de eerste twee p zijn en de laatste twee $p-1$. Omdat $12n^2+12n$ deelbaar is door 2, moet $p-1$ wel even zijn. Dat geeft voor $12n^2+12n$ nog de mogelijkheden 1100, 3322, 5544, 7766 en 9988. Het moet echter ook deelbaar zijn door 3, waardoor alleen 5544 overblijft.
We hebben nu gevonden dat $12n^2+12n = 5544$, dus $n^2+n = \frac{5544}{12} = 462$. Dit kunnen we herschrijven als $n^2+n-462 = 0$. Dit is een kwadratische vergelijking, die we kunnen ontbinden: $(n-21)(n+22) = 0$. Nu moet n een positief geheel getal zijn, dus de enige oplossing is $n = 21$. Hieruit berekenen we het enige drietal dat voldoet: $(a, b, c) = (41, 43, 45)$. □

Opgave 2.8.
We bekijken in deze opgave positieve gehele getallen bestaande uit 5 cijfers, waarvan het eerste en het laatste cijfer niet nul zijn. We noemen zo'n getal een *palindroomproduct* als het aan de volgende twee voorwaarden voldoet:

- het getal is een palindroom (d.w.z. van links naar rechts gelezen hetzelfde als van rechts naar links gelezen);
- het getal is een product van twee positieve gehele getallen, waarvan het ene getal van links naar rechts gelezen gelijk is aan het andere getal van rechts naar links gelezen, zoals 4831 en 1384.

Zo is 20502 een palindroomproduct, want $102 \cdot 201 = 20502$ en 20502 is zelf een palindroom.
Bepaal alle palindroomproducten van 5 cijfers.

Finale 2009, opgave 1

Antwoord: *Bij de opgaven van de finale wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: Merk op dat de twee getallen die bij de tweede voorwaarde worden genoemd, niet op een 0 mogen eindigen; dan zou immers het product ook op een 0 eindigen. De twee getallen hebben dus evenveel cijfers. Maar het product van twee getallen bestaande uit vier of meer cijfers is te groot (dat bestaat uit minstens zeven cijfers) en het product van twee getallen bestaande uit twee of minder cijfers is te klein (dat bestaat uit hoogstens vier cijfers).
Voor de tweede voorwaarde moeten we dus kijken naar producten van getallen bestaande uit drie cijfers, zeg $\overline{abc}$ en $\overline{cba}$.
Als we dit uitwerken krijgen we: $\overline{abc} \cdot \overline{cba} = (100a+10b+c)(100c+10b+a) = 10000ac + 1000b(a+c) + 100(a^2+b^2+c^2) + 10b(a+c) + ac$. Als $ac > 9$, dan bestaat dit getal uit meer dan 5 cijfers. Dus $ac \leqslant 9$. Stel $b(a+c) > 9$, dan is het eerste cijfer meer dan ac en niet meer gelijk aan het laatste cijfer. Dus $b(a+c) \leqslant 9$. Een zelfde argument geldt dan voor $a^2+b^2+c^2$. Dus we weten dat $1+b^2+1 \leqslant a^2+b^2+c^2 \leqslant 9$ dus $b = 0$, $b = 1$ of $b = 2$.
Voor $b = 0$ moet $a^2+c^2 \leqslant 9$, dus (wegens $a, c \geqslant 1$) $1 \leqslant a \leqslant 2$ en idem voor c.
Voor $b = 1$ gaan de voorwaarden over in $a+c \leqslant 9$ en $a^2+c^2 \leqslant 8$, terwijl ook $1 \leqslant ac \leqslant 9$. De tweede voorwaarde geeft $1 \leqslant a \leqslant 2$ en idem voor c.
Voor $b = 2$ gaan de voorwaarden over in $a+c \leqslant 4$ en $a^2+c^2 \leqslant 5$. Dus drie mogelijkheden voor (a, b).
In onderstaande tabel gaan we nu alle mogelijkheden langs.

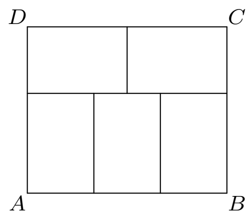
a	b	c	$\overline{abc} \cdot \overline{cba}$
1	0	1	10201
1	0	2	20502
2	0	1	idem
2	0	2	40804
1	1	1	12321
1	1	2	23632
2	1	1	idem
2	1	2	44944
1	2	1	14641
1	2	2	26962
2	2	1	idem

Het blijkt dat er in totaal acht verschillende palindroomproducten zijn: 10201, 12321, 14641, 20502, 23632, 26962, 40804 en 44944. $\square$

HOOFDSTUK 3

Letters invoeren – Uitwerkingen

Opgave 3.1.
Rechthoek $ABCD$ is verdeeld in vijf gelijke rechthoekjes. De omtrek van elk van deze rechthoekjes is 20.
Wat is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$?



A) 72 B) 112 C) 120 D) 140 E) 150

Eerste ronde 2013, A2

Antwoord: C) 120
Uitwerking: Noem x de langste zijde van een rechthoekje en y de kortste. Uit het plaatje zien we dat $2x = 3y$. De omtrek van een rechthoekje is 20, maar anderzijds ook $2x+2y = 3y+2y = 5y$. Dus $5y = 20$, dus $y = 4$. Daarmee wordt $x = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. De oppervlakte van een rechthoekje is dus $6 \cdot 4 = 24$ en de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is vijfmaal zo groot, dus $5 \cdot 24 = 120$. $\square$

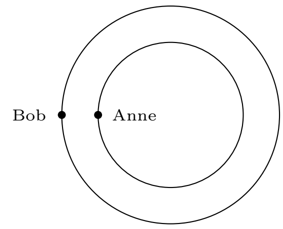
Opgave 3.2.
Frank heeft een la waarin allemaal losse sokken zitten. Er zitten 10 rode sokken in en de rest van de sokken is blauw. Hij gaat blind een aantal sokken uit de la pakken en wil daarna twee sokken van een bepaalde kleur hebben. Om zeker te zijn van minstens twee rode sokken moet hij twee keer zoveel sokken pakken als om zeker te zijn van minstens twee blauwe sokken.
Hoeveel sokken zitten er in totaal in de la?

A) 14 B) 18 C) 26 D) 32 E) 40

Eerste ronde 2012, A5

Antwoord: D) 32
Uitwerking: Het aantal blauwe sokken in de la noemen we b. Om zeker te weten dat hij twee *blauwe* sokken heeft, moet Frank 12 sokken pakken. In het slechtste geval pakt hij namelijk eerst de tien rode sokken. Om zeker te weten dat hij twee *rode* sokken heeft, moet hij $b + 2$ sokken pakken. In het slechtste geval pakt hij namelijk eerst de b blauwe sokken.
Gegeven is dat dit tweede aantal tweemaal zo groot is als het eerste, dus $b + 2 = 2 \times 12 = 24$. Hieruit volgt dat $b = 22$. Het totaal aantal sokken is dan $22 + 10 = 32$. $\square$

Opgave 3.3.
Anne en Bob zitten in een kermisattractie. Ze bewegen in cirkels rond hetzelfde middelpunt en in dezelfde richting. Anne gaat één keer per 20 seconden rond, Bob één keer per 28 seconden. Op een gegeven moment zijn ze op de kleinst mogelijke afstand van elkaar (zie de tekening).
Hoeveel seconden duurt het daarna voordat Anne en Bob juist zo ver mogelijk van elkaar verwijderd zijn?



Eerste ronde 2011, A7

Antwoord: 35
Uitwerking: Noem t de tijd in seconden na de situatie in de tekening. Dan heeft Anne $\frac{t}{20}$ rondjes afgelegd en Bob $\frac{t}{28}$. De eerste keer dat ze zo ver mogelijk uit elkaar zijn, is wanneer Anne een half rondje meer heeft afgelegd dan Bob. Dus $\frac{t}{28} + \frac{1}{2} = \frac{t}{20}$, waaruit volgt

$$\frac{1}{2} = \frac{t}{20} - \frac{t}{28} = \frac{7t - 5t}{140} = \frac{2t}{140} = \frac{t}{70},$$

dus $t = \frac{1}{2} \cdot 70 = 35$ seconden. □

Opgave 3.4.
Een bus komt langs drie haltes. De middelste halte ligt even ver van de eerste halte als van de laatste halte. Fred staat bij de middelste halte en moet nog 15 minuten wachten voor de bus arriveert. Als hij naar de eerste halte fietst, zal hij daar gelijktijdig met de bus aankomen. Als hij in plaats daarvan naar de laatste halte rent, zal hij daar ook gelijktijdig met de bus aankomen.
Hoe lang zou Fred erover doen om naar de laatste halte te fietsen en vervolgens naar de middelste halte terug te rennen?

Eerste ronde 2013, B3

Antwoord: 30 minuten
Uitwerking: Noem r de tijd in minuten die Fred nodig heeft om van een halte naar de volgende of vorige halte te rennen, f de tijd die hij nodig heeft om zo'n zelfde stuk te fietsen, en b de tijd die de bus nodig heeft om van een halte naar de volgende te rijden. Gegeven is dat de bus na f minuten bij de eerste halte is en na r minuten bij de derde halte. De bus doet er $2b$ minuten over om van de eerste naar de derde halte te rijden, dus $r = f + 2b$. De bus is na $f + b$ minuten bij de tweede halte, namelijk b minuten nadat hij bij de eerste halte is, dus we weten ook nog dat $f + b = 15$. Gevraagd is de waarde van $f + r$. Als we hierin $r = f + 2b$ invullen, krijgen we

$$f + r = f + f + 2b = 2f + 2b = 2(f + b) = 2 \cdot 15 = 30.$$

□

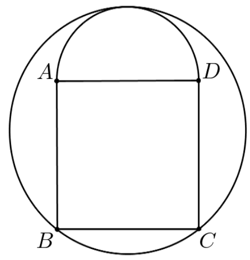
Opgave 3.5.
Een aantal hokjes van een vel ruitjespapier vormen samen een rechthoek. Van deze hokjes liggen er evenveel *wel* als *niet* aan de rand van de rechthoek.
Hoeveel hokjes telt de rechthoek in totaal? Geef alle mogelijkheden.

Eerste ronde 2012, B3

Antwoord: 48 en 60
Uitwerking: Het aantal hokjes in de lengte van de rechthoek noemen we a en het aantal in de breedte noemen we b. We mogen wel aannemen dat $a \geqslant b$. Het totaal aantal hokjes in de rechthoek is ab en het aantal hokjes aan de rand is gelijk aan $2a+2b-4$. Gegeven is dat de helft van de hokjes aan de rand ligt, dus $ab = 2(2a+2b-4)$. Herschrijven geeft: $ab-4a-4b+16 = 8$. Het linkerlid kunnen we ontbinden, zodat we vinden dat $(a-4)(b-4) = 8$.

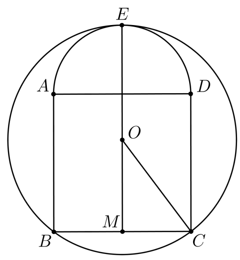
Omdat a en b positieve gehele getallen zijn en $a \geqslant b$ geldt, zijn de enige mogelijkheden: $a-4=8, b-4=1$ en $a-4=4, b-4=2$. De mogelijkheden waarbij $a-4$ en $b-4$ negatief zijn vallen namelijk af, omdat $b-4$ dan hoogstens -4 is en b dan niet positief is. Oftewel: $a=12, b=5$ en $a=8, b=6$. Voor de rechthoek geeft dit $12 \times 5 = 60$ of $8 \times 6 = 48$ hokjes in totaal. □

Opgave 3.6.
Een figuur bestaat uit een vierkant $ABCD$ en een halve cirkel met middellijn AD buiten het vierkant. De zijde van het vierkant heeft lengte 1. Wat is de straal van de omgeschreven cirkel van de figuur?



Eerste ronde 2010, B3

Antwoord: $\frac{5}{6}$
Uitwerking: Noem het middelpunt van de omgeschreven cirkel O, het raakpunt met de kleine cirkel E en geef het midden van BC aan met M. Wegens de stelling van Pythagoras geldt dat $|OC|^2 = |MC|^2 + |OM|^2$. Omdat $|OM| = |EM| - |OE| = \frac{3}{2} - |OC|$ volgt hieruit dat $|OC|^2 = \frac{1}{2}^2 + (\frac{3}{2} - |OC|)^2$. Oplossen van deze vergelijking geeft $|OC| = \frac{5}{6}$. □



Opgave 3.7.
Een aantal scholieren deed mee aan een test waar je 100 punten voor kon halen. Iedereen scoorde minstens 60 punten. Precies vijf scholieren scoorden 100 punten. De gemiddelde score van de deelnemende scholieren was 76 punten.
Hoeveel scholieren deden er minstens mee aan deze test?

Tweede ronde 2013, B1

Antwoord: 13
Uitwerking: Noem n het aantal scholieren dat meedeed aan de test. Die hebben gemiddeld 76 punten gescoord, dus samen $76n$ punten. Anderzijds was het aantal punten minstens $5 \cdot 100 + (n-5) \cdot 60$ omdat vijf leerlingen 100 punten hebben gescoord en de rest (dus $n-5$) minstens 60. Dit is samen $500 + 60n - 300 = 200 + 60n$. We krijgen dus de ongelijkheid

$$76n \geqslant 200 + 60n.$$

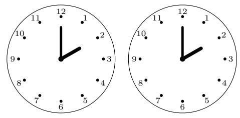
Dit betekent dat $16n \geqslant 200$, dus

$$n \geqslant \frac{200}{16} = 12\frac{1}{2}.$$

Omdat n het aantal scholieren is en dus natuurlijk geheel, moet n dus minstens 13 zijn.

Er is inderdaad een oplossing met dertien scholieren, want als vijf scholieren 100 punten scoorden en de overgebleven acht scholieren scoorden 61 punten, dan was de gemiddelde score inderdaad $\frac{5 \cdot 100 + 8 \cdot 61}{13} = \frac{988}{13} = 76$ punten. □

Opgave 3.8.



De wijzers van twee klokken, zoals die in de figuur hiernaast, draaien met constante snelheid rond. Beide klokken lopen niet meer goed; de een loopt precies 1% sneller dan de werkelijke tijd, en de ander zelfs precies 5% sneller dan de werkelijke tijd. Op een bepaald moment wijzen ze allebei precies 2 uur aan. Na verloop van tijd wijzen de klokken voor het eerst opnieuw dezelfde tijd aan.
Welke tijd wijzen ze op dat moment aan?

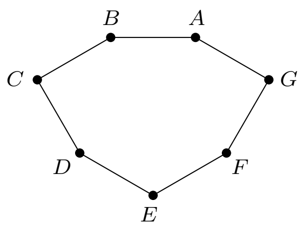
Tweede ronde 2013, B3

Antwoord: 5 uur
Uitwerking: Noem t het aantal uur na het moment dat de klokken beide 2 uur aanwijzen. De tijd die de eerste klok dan weergeeft is $2 + t \cdot 1{,}01$ en de tijd die de tweede klok dan weergeeft is $2 + t \cdot 1{,}05$, op twaalfvouden na. De klokken staan dus voor het eerst weer gelijk als $2 + t \cdot 1{,}01 + 12 = 2 + t \cdot 1{,}05$. Dit betekent $12 = t \cdot 0{,}04$, dus $t = 300$. De tijd die klokken dan aangeven is $2 + 300 \cdot 1{,}01 = 305$, op twaalfvouden na. Omdat 300 een twaalfvoud is, geven de klokken 5 uur aan. □

HOOFDSTUK 4

Knippen en plakken – Uitwerkingen

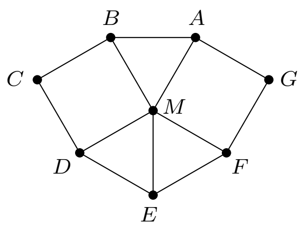
Opgave 4.1.
Gegeven is zevenhoek $ABCDEFG$, waarvan alle zijden lengte 2 hebben. Bovendien geldt: $\angle E = 120°$, $\angle C = \angle G = 90°$ en $\angle A = \angle B = \angle D = \angle F$. Wat is de oppervlakte van de zevenhoek?



A) $10 + 2\sqrt{2}$ B) $8 + 3\sqrt{3}$ C) 14 D) $10 + 2\sqrt{6}$ E) $8 + 3\sqrt{6}$

Eerste ronde 2011, A3

Antwoord: B) $8 + 3\sqrt{3}$



Uitwerking: De zevenhoek kan worden opgedeeld in twee vierkanten en drie gelijkzijdige driehoeken, allemaal met zijden van lengte 2. We weten dat de oppervlakte van zo'n vierkant gelijk is aan 4. Met Pythagoras kunnen we de hoogte van bijvoorbeeld driehoek ABM berekenen en we vinden dan $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$. De oppervlakte van de driehoek is dan $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. De totale oppervlakte van de zevenhoek is dus $2 \cdot 4 + 3 \cdot \sqrt{3} = 8 + 3\sqrt{3}$. □

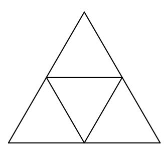
Opgave 4.2.
Een regelmatige zeshoek en een gelijkzijdige driehoek hebben dezelfde omtrek. Wat is verhouding *oppervlakte zeshoek* : *oppervlakte driehoek*?

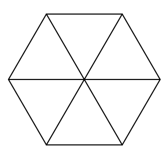
A) $2 : 3$ B) $1 : 1$ C) $4 : 3$ D) $3 : 2$ E) $2 : 1$

Eerste ronde 2013, A6

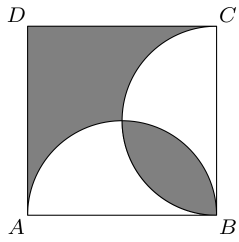
Antwoord: D) $3 : 2$

Uitwerking: We verdelen de zeshoek in zes gelijkzijdige driehoekjes en de driehoek in vier gelijkzijdige driehoekjes zoals in de figuur. Omdat de zeshoek en de driehoek gelijke omtrek hebben, zijn de zijden van de driehoek tweemaal zo lang als die van de zeshoek. De driehoekjes in deze verdelingen zijn dus even groot. De verhouding tussen de oppervlaktes is daarom $6 : 4$, oftewel $3 : 2$. □



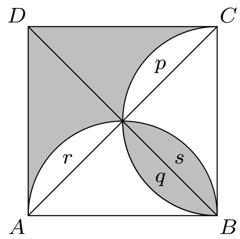


Opgave 4.3.
Gegeven is een vierkant $ABCD$ waarvan de zijden lengte 4 hebben. Aan de binnenkant van het vierkant zijn twee halve cirkels met middellijnen AB en BC getekend (zie figuur).
Wat is de gezamenlijke oppervlakte van de twee grijze gebieden?

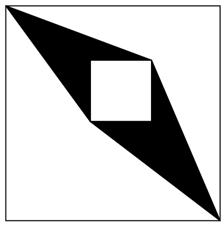


Tweede ronde 2013, B2

Antwoord: 8
Uitwerking: Merk op dat de twee cirkels allebei door het midden van het vierkant gaan. De vier cirkelsegmenten aangegeven met p, q, r en s horen dus alle vier bij een kwart van een cirkel met straal 2 en hebben dus alle vier dezelfde oppervlakte. De totale oppervlakte van het grijze gebied is daarom gelijk aan de oppervlakte van driehoek ACD en daarmee gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. □

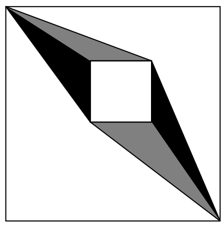


Opgave 4.4.
Een vierkant met zijde 2 ligt binnen een vierkant met zijde 7. De zijden van het kleine vierkant zijn evenwijdig aan de zijden van het grote vierkant.
Wat is de oppervlakte van het zwarte gebied?



Tweede ronde 2011, B2

Antwoord: 10
Uitwerking: Het zwarte gebied uit de opgave splitsen we op in vier driehoekjes, waarvan we er twee grijs hebben gemaakt. De twee grijze driehoekjes hebben beide basis 2 en hebben samen hoogte $7 - 2 = 5$, namelijk de hoogte van het grote vierkant min de hoogte van het kleine vierkant. De oppervlakte van de twee grijze driehoekjes samen is dus $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$. Precies hetzelfde geldt voor de twee zwarte driehoekjes. De totale oppervlakte van het gebied is dus $5 + 5 = 10$.

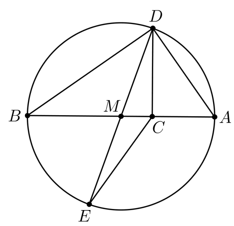


□

Opgave 4.5.
Bekijk een cirkel met middellijn AB. Punt C ligt op het lijnstuk AB zodanig dat $2 \cdot |AC| = |BC|$. De punten D en E liggen op de cirkel zodat CD loodrecht op AB staat en DE ook een middellijn van de cirkel is. Noteer de oppervlaktes van driehoeken ABD en CDE als $O(ABD)$ en $O(CDE)$. Bepaal de waarde van $\frac{O(ABD)}{O(CDE)}$.

Tweede ronde 2010, B2

Antwoord: 3
Uitwerking: Noem het middelpunt van de cirkel M. We knippen driehoek CDE op in driehoeken CDM en CEM. Deze twee hebben gelijke oppervlakte, want ze hebben bases van gelijke lengte $|DM| = |EM|$ en gelijke hoogte. Er volgt dat



$$O(CDE) = 2 \cdot O(CDM).$$

Er geldt $|AC| = \frac{1}{3}|AB|$ en $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$, zodat $|CM| = |AM| - |AC| = \frac{1}{2}|AB| - \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{6}|AB|$. Driehoeken ABD en CDM hebben ten opzichte van de bases AB en CM dezelfde hoogte en er geldt dus dat

$$O(ABD) = 6 \cdot O(CDM).$$

Combinatie van de twee gevonden vergelijkingen geeft $\frac{O(ABD)}{O(CDE)} = \frac{6}{2} = 3$. $\square$

HOOFDSTUK 5

Durf te proberen – Uitwerkingen

Opgave 5.1.
Vandaag is het 4 februari 2011. Deze datum wordt genoteerd als 04-02-2011. We kijken in deze opgave naar de eerstvolgende dag waarvan de datum met acht *verschillende* cijfers wordt geschreven. In welke maand valt die dag?

A) januari B) maart C) juni D) oktober E) december

Eerste ronde 2011, A2

Antwoord: C) juni
Uitwerking: Als je gewoon gaat proberen wat data te vinden die met verschillende cijfers worden geschreven, kom je er vanzelf achter dat er bepaalde voorwaarden moeten gelden, bijvoorbeeld dat 11 niet als maand kan en dat een maand met een 0 automatisch samen moet gaan met een dag zonder 0. Zo komen we tot de volgende oplossing.
Het jaartal van de gezochte datum begint met een cijfer dat 2 of hoger is. We zoeken de eerste datum waarvan het jaartal met een 2 begint en alle acht de cijfers verschillend zijn. Als die bestaat is het de gezochte datum.
Voor de maand vallen 11 (twee dezelfde cijfers) en 12 (cijfer 2 is al gebruikt in het jaartal) af. De maand (01 t/m 10) bevat dus het cijfer 0. De dag begint daarom of met een 1 of een 3. In het tweede geval is het de 31-ste, want de 0 is al bezet. In beide gevallen zit de 1 in de dag. Nu de 0 en 1 al bezet zijn, is het kleinst mogelijke jaartal 2345. De kleinst mogelijke maand die we dan nog kunnen kiezen is 06, oftewel juni, met als dag de 17e. We zien dat de gevonden datum 17-06-2345 inderdaad met acht verschillende cijfers wordt geschreven. □

Opgave 5.2.
Carry heeft zes kaarten. Op elke kaart staat een positief geheel getal geschreven. Zij kiest drie kaarten en rekent de som uit van de getallen op die kaarten. Zij doet dit voor alle 20 mogelijke combinaties van drie kaarten. Tienmaal krijgt Carry als uitkomst 16 en tienmaal uitkomst 18. Wat is het kleinste getal dat op de kaarten voorkomt?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Eerste ronde 2012, A7

Antwoord: D) 4
Uitwerking: Neem maar eens zes getallen en reken steeds de som van drie daarvan uit. Je komt er heel snel achter dat er meestal veel te veel verschillende antwoorden uitkomen. Slechts twee uitkomsten krijgen, is heel bijzonder en betekent dat er veel getallen op de kaarten hetzelfde

moeten zijn. Zo komen we tot de volgende oplossing.
Omdat er maar twee verschillende uitkomsten zijn, kunnen er maar twee verschillende getallen op de kaarten voorkomen. Immers, als drie kaarten verschillende getallen dragen, dan geven ze in combinatie met een tweetal van de overige drie kaarten elk een andere uitkomst.
Noem de twee getallen die voorkomen a en b. We mogen wel aannemen dat a op minstens drie kaartjes voorkomt. Omdat $a+a+a$, $a+a+b$ en $a+b+b$ verschillend zijn, mag b maar eenmaal voorkomen.
Er zijn nu twee gevallen: $a+a+a=16, a+a+b=18$ en $a+a+a=18, a+a+b=16$. De eerste mogelijkheid valt af omdat 16 geen drievoud is (a was een geheel getal). We zien dus dat $a=\frac{18}{3}=6$ en $b=16-12=4$. Het kleinste getal dat voorkomt is dus 4. □

Opgave 5.3.
Van een 50-tal verschillende getallen uit de verzameling $\{1,2,3,\ldots,100\}$ is de som gelijk aan 2900. Wat is het kleinst mogelijke aantal *even* getallen onder deze 50 getallen?

Eerste ronde 2008, B2

Antwoord: 6
Uitwerking: Als je alle 50 oneven getallen uit de verzameling $\{1,2,3,\ldots,100\}$ pakt dan zijn die bij elkaar opgeteld $\frac{1}{2}\times 50\times(1+99)=2500$. Dat is 400 te weinig. Vervang dus de kleinste oneven getallen door de grootst mogelijke even getallen, telkens per twee omdat 400 even is. Als we 1 en 3 vervangen door 100 en 98 krijgen we 2694. Daarna $2694-5-7+96+94=2872$. We moeten dus nog ten minste één zo'n stap doen. En die lukt: $2872-9-11=2852$, dus plaats bijvoorbeeld 20 en 28 terug; dan hebben we som 2900 gevonden met 6 even getallen en bovendien hebben we laten zien dat het met minder niet lukt. □

Opgave 5.4.
Alle 2012 kamelen in Nederland moeten verdeeld worden over 40 weides. Geen twee weides mogen hetzelfde aantal kamelen krijgen. De weide in het centrum van Amsterdam moet het grootste aantal kamelen krijgen.
Hoeveel kamelen moeten daar minimaal komen te staan?

Tweede ronde 2012, B2

Antwoord: 70
Uitwerking: We willen dat het grootste aantal kamelen juist zo klein mogelijk is. We proberen eerst maar 0 tot en met 39, want alle aantallen moeten verschillend zijn. Dat zijn in totaal $\frac{1}{2}\cdot 40\cdot(0+39)=780$ kamelen. Dit zijn er veel te weinig: we hebben nog $2012-780=1232$ kamelen nodig. Omdat we het grootste aantal klein willen houden, willen we deze zo gelijkmatig mogelijk toevoegen. Dus we stoppen er overal 30 bij, zodat er nog 1200 in totaal bij komen. Dan staan er 30 tot en met 69 in de weides, maar hebben we nog 32 kamelen te weinig geplaatst. We zien nu dat 69 niet haalbaar is voor de weide in Amsterdam. Maar 70 juist wel, want we kunnen die 32 kamelen nog over de 32 grootste weides verdelen. □

Opgave 5.5.
De bewerking $\odot$ voldoet voor alle positieve getallen x en y aan de volgende drie regels:

Regel 1: $(2x) \odot y = \frac{1}{2} + (x \odot y)$.

Regel 2: $y^2 \odot x = x^2 \odot y$.

Regel 3: $2 \odot 2 = \frac{3}{2}$.

Bereken $32 \odot 8$.

Eerste ronde 2012, B4

Antwoord: $\frac{11}{2}$
Uitwerking: De uitkomst van $2 \odot 2$ is gegeven. Kijk nu welke andere uitkomsten je hiermee kunt berekenen. Zo kun je nu met **Regel 1** $4 \odot 2$ uitrekenen en daarna ook $8 \odot 2$ en $16 \odot 2$. Vervolgens kun je **Regel 2** inzetten, want die zegt dat $16 \odot 2 = 4 \odot 4$. Enzovoorts. Uiteindelijk vind je wel een route die leidt naar $32 \odot 8$, zoals hieronder beschreven.
Met **Regel 1** vinden we: $32 \odot 8 = \frac{1}{2} + 16 \odot 8 = \frac{2}{2} + 8 \odot 8 = \frac{3}{2} + 4 \odot 8$.
Uit **Regel 2** met $y = 2$ en $x = 8$ volgt: $4 \odot 8 = 64 \odot 2$.
Herhaald toepassen van **Regel 1** geeft: $64 \odot 2 = \frac{1}{2} + 32 \odot 2 = \frac{2}{2} + 16 \odot 2 = \ldots = \frac{5}{2} + 2 \odot 2$.
Samenvoegen en **Regel 3** invullen geeft nu:

$$32 \odot 8 = \frac{3}{2} + 4 \odot 8 = \frac{3}{2} + 64 \odot 2 = \frac{8}{2} + 2 \odot 2 = \frac{11}{2}.$$

□

Opgave 5.6.
In een warenhuis loopt een roltrap van de begane grond naar de eerste verdieping. Dion gaat met deze roltrap omhoog; hij zet hierbij zelf ook nog een aantal stappen in een vast tempo. Raymond loopt over dezelfde roltrap, tegen de richting in, van boven naar beneden en zet hierbij stappen in hetzelfde tempo als Dion. Ze nemen allebei één trede per stap. Dion is na precies 12 stappen boven; Raymond is na precies 60 stappen beneden.
Hoeveel stappen zou Dion nodig hebben om boven te komen als de roltrap stilstond?

Eerste ronde 2011, B2

Antwoord: 20
Uitwerking: Om het probleem beter te begrijpen, gaan we even uit van een roltrap met 45 treden. Dat is dus het aantal stappen dat nodig is om boven te komen als de roltrap stilstaat. Verder kiezen we de snelheid van de roltrap zo dat als Dion twee stappen heeft gezet, de treden van de roltrap één trede zijn opgeschoven in de richting van Dion mee. Dan hoeft hij dus voor iedere 3 treden die hij stijgt, maar 2 stappen te zetten. Hij zal dus in $45 \cdot \frac{2}{3} = 30$ stappen boven zijn. Voor Raymond, die van boven naar beneden loopt, gaat de roltrap juist tegen zijn looprichting in. Voor iedere 2 stappen die hij zet, is hij eigenlijk maar 1 van de 45 treden gedaald. Hij zal dus wel $45 \cdot \frac{2}{1} = 90$ stappen nodig hebben. We zien dat in dit geval Dion 30 stappen nodig heeft om boven te komen en Raymond 90 stappen om beneden te komen. We willen nu onderzoeken welke getallen we in het begin hadden moeten kiezen om hier niet op 30 en 90 uit te komen, maar op 12 en 60.
We noemen t het aantal treden van de roltrap. Verder noemen we v het aantal treden dat de roltrap opschuift in de tijd dat Dion of Raymond precies één stap doet. Dion loopt met de roltrap mee en zal dus als hij 1 stap zet, wel $1 + v$ trede stijgen. Maar Raymond beweegt tegen de roltrap in, en daalt effectief slechts $1 - v$ trede per stap. Het aantal stappen dat nodig is

om t treden te stijgen als je per stap $1 + v$ treden beweegt, is simpelweg $\frac{t}{1+v}$. Net zo goed zal Raymond precies $\frac{t}{1-v}$ stappen nodig te hebben om weer beneden te komen. Deze aantallen waren gegeven in de opgave en we vinden dus het stelsel van vergelijkingen

$$\frac{t}{1+v} = 12 \text{ en } \frac{t}{1-v} = 60.$$

Uit beide vergelijkingen kunnen we v oplossen, wat samen leidt tot

$$\frac{t}{12} - 1 = v = 1 - \frac{t}{60},$$

dus

$$t\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{60}\right) = \frac{t}{12} + \frac{t}{60} = 2.$$

Hieruit volgt dat

$$t = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{60}}.$$

Zowel de teller als noemer met 60 vermenigvuldigen levert dan dat

$$t = \frac{120}{5+1} = 20.$$

□

Opgave 5.7.
Voor elk tweetal positieve gehele getallen a en b definiëren we een bewerking $a \otimes b$ met de volgende drie eigenschappen:

Regel 1: $a \otimes a = a + 2.$

Regel 2: $a \otimes b = b \otimes a.$

Regel 3: $\dfrac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \dfrac{a+b}{b}.$

Bereken $8 \otimes 5$.

Eerste ronde 2007, B3

Antwoord: 120
Uitwerking: Met **Regel 1** kunnen we direct $1 \otimes 1$, $2 \otimes 2$, enzovoorts uitrekenen. We kunnen dit nu in **Regel 3** gebruiken als we daar voor a en b dezelfde getallen kiezen, bijvoorbeeld $a = b = 2$. Dan kun je $2 \otimes 4$ uitrekenen. Dat weer in **Regel 2** stoppen geeft je $4 \otimes 2$. Zo kun je verder blijven proberen om steeds meer verschillende uitkomsten te vinden. Uiteindelijk vind je dan dat je $8 \otimes 5$ kunt uitdrukken in uitkomsten die je al hebt, zoals hieronder beschreven.
Volgens **Regel 2** geldt $8 \otimes 5 = 5 \otimes 8$. Met **Regel 3** kunnen we $5 \otimes 8$ uitdrukken in $5 \otimes 3$, want $\frac{5 \otimes 8}{5 \otimes 3} = \frac{8}{3}$, dus $5 \otimes 8 = \frac{8}{3} \cdot (5 \otimes 3) = \frac{8}{3} \cdot (3 \otimes 5)$. Net zo vinden we dat $3 \otimes 5 = \frac{5}{2} \cdot (2 \otimes 3)$ en $2 \otimes 3 = \frac{3}{1} \cdot (1 \otimes 2)$ en ten slotte $1 \otimes 2 = \frac{2}{1} \cdot (1 \otimes 1)$. Met **Regel 1** kunnen we uitrekenen dat $1 \otimes 1 = 3$. Dus terugrekenend vinden we dan $8 \otimes 5 = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot 3 = 120$. □

Opgave 5.8.
Je hebt één kaartje met daarop het getal 12. Je mag nieuwe kaartjes toevoegen aan je verzameling volgens de volgende regels.

- Als je al een kaartje met een getal a hebt, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $2a + 1$.
- Als je al een kaartje met een getal b hebt dat deelbaar is door 3, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $\frac{b}{3}$.

(a) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal 29 kunt maken.

(b) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal $2^{2012} - 1$ kunt maken.

(c) Laat zien dat je nooit een kaartje met daarop het getal 100 kunt maken.

Tweede ronde 2012, C1

Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: Het getal 12 is al gegeven. Ga proberen zoveel mogelijk andere getallen te maken. In principe heb je bij elk getal twee mogelijkheden: om de ene regel of de andere toe te passen. De tweede regel kan echter alleen als het getal deelbaar door 3 is; anders heb je maar één mogelijkheid. Maak hiermee een overzicht van een flink aantal getallen die je kunt maken vanuit 12. Dit geeft je inzicht over welke getallen wel en niet gemaakt kunnen worden.
Het kan ook helpen om juist vanuit de andere kant te gaan proberen: vanuit welk getal kan 29 gemaakt zijn, en welk getal had daar dan weer voor moeten zitten? Uiteindelijk vind je bijvoorbeeld de volgende oplossing.

(a) Door de twee regels toe te passen kunnen we achtereenvolgens de volgende kaartjes maken:

$$12 \to 4 \to 9 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 21 \to 43 \to 87 \to 29.$$

(b) In onderdeel (a) zagen we al dat we $3 = 2^2 - 1$ konden maken. Door daarna herhaaldelijk de eerste regel toe te passen vinden we dat we ook

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2^2 - 1) + 1 &= 2^3 - 1, \\ 2 \cdot (2^3 - 1) + 1 &= 2^4 - 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kunnen maken. In het bijzonder kunnen we ook $2^{2012} - 1$ maken.

(c) Voor elk getal levert toepassen van regel 1 een *oneven* getal op. Toepassen van regel 2 op een *oneven* getal (als het een drievoud is), levert weer een *oneven* getal op. Zodra we ooit regel 1 toepassen, krijgen we met dat kaartje dus alleen nog maar *oneven* getallen. Om *even* getallen te maken moeten we dus direct regel 2 (herhaald) toepassen. De enige *even* getallen die we kunnen maken zijn dus 12 en 4.

□

Opgave 5.9.
We noemen een positief geheel getal van n cijfers ($n \geqslant 3$ en $n \leqslant 9$) *bovengemiddeld* als het voldoet aan de volgende twee eisen:

- het getal bevat alle cijfers van 1 tot en met n precies één keer;
- voor elk cijfer behalve de eerste twee geldt: het dubbele van het cijfer is minstens zo groot als de som van de twee cijfers die er direct voor staan.

Zo is 31254 bovengemiddeld, want het bestaat uit de cijfers 1 tot en met 5 en verder geldt

$$2 \cdot 2 \geqslant 3 + 1, \qquad 2 \cdot 5 \geqslant 1 + 2 \qquad \text{en} \qquad 2 \cdot 4 \geqslant 2 + 5.$$

(a) Geef een bovengemiddeld getal van 4 cijfers waarvan het eerste cijfer een 4 is.

(b) Laat zien dat er geen bovengemiddeld getal van 4 cijfers is waarvan het tweede cijfer een 4 is.

(c) Bepaal voor bovengemiddelde getallen van 7 cijfers alle mogelijke posities van het cijfer 7.

Tweede ronde 2013, C1

Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: In eerste instantie kun je bij deze opgave proberen om zelf een aantal bovengemiddelde getallen te construeren. Je krijgt dan vanzelf gevoel voor hoe die getallen in elkaar zitten. Daarmee kun je dan proberen de vragen te beantwoorden, zoals hieronder.

(a) Het getal 4132 begint met een 4 en is bovengemiddeld, omdat $2 \cdot 3 \geqslant 4 + 1$ en $2 \cdot 2 \geqslant 1 + 3$.

(b) Stel dat $a4bc$ een viercijferig bovengemiddeld getal zou zijn, met a, b en c de cijfers 1, 2 en 3 zijn (niet noodzakelijk in die volgorde). Er moet gelden dat $2 \cdot b \geqslant a + 4 \geqslant 5$. Dus $b \geqslant 3$. Op dezelfde manier vinden we $2 \cdot c \geqslant 4 + b \geqslant 7$, dus $c \geqslant 4$. Maar c was hoogstens 3, dus dat kan niet.

(c) Merk op dat 1243756, 1234576 en 1234567 bovengemiddelde getallen zijn waarbij de 7 op de vijfde, zesde en zevende positie staat.
Het cijfer 7 kan niet op de eerste positie staan. Stel namelijk dat $7abcdef$ bovengemiddeld zou zijn. Dan zou gelden dat $2 \cdot b \geqslant 7 + a \geqslant 8$ en dus $b \geqslant 4$. Vervolgens geldt $2 \cdot c \geqslant a + b \geqslant 5$, dus $c \geqslant 3$. Nu zien we achtereenvolgens dat $d, e, f \geqslant 4$. De enige plek voor zowel het cijfer 1 als het cijfer 2 is dan a en dat kan niet.
Het cijfer 7 kan niet op de tweede of derde positie staan. Immers, dan moet het cijfer direct na de 7 minstens 4 zijn, en daarmee ook alle cijfers erna. De cijfers 1, 2 en 3 moeten dus alledrie voor de 7 staan, terwijl er hooguit twee posities beschikbaar zijn.
Het cijfer 7 kan niet op de vierde positie staan. Immers, de 1 kan niet op de derde positie staan, want $2 \cdot 1 < 2 + 3$. Omdat het cijfer voor de 7 minstens 2 is, moet het cijfer na de 7 minstens 5 zijn. Het cijfer daarna moet dan minstens 6 zijn, evenals het cijfer daarna. De vier cijfers 1, 2, 3 en 4 kunnen dus enkel op de drie posities voor de 7 staan, hetgeen onmogelijk is.

$\square$

Opgave 5.10.
We nummeren de kolommen van een $n \times n$-bord van 1 tot en met n. In elk vakje van het bord zetten we een getal, op zo'n manier dat in elke rij precies de getallen 1 tot en met n staan (de volgorde kan in elke rij anders zijn) en in elke kolom ook precies de getallen 1 tot en met n staan. We kleuren vervolgens een vakje grijs als het getal in dat vakje groter is dan het nummer van de kolom waar het vakje in zit. In de figuur zie je een voorbeeld voor $n = 3$.

1	2	3
3	1	2
1	2	3
2	3	1

(a) Stel dat $n = 5$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?

(b) Stel dat $n = 10$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?

Finale 2012, opgave 2

Antwoord: *Bij de opgaven van de finale wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: In eerste instantie kun je zelf wat borden vullen met getallen en de juiste vakjes blauw kleuren. Je ontdekt dan wellicht de eigenschappen die je nodig hebt om de vragen te beantwoorden.

(a) Ja, het kan. Een mogelijke invulling van een 5×5-bord met in elke rij precies twee grijze vakjes zie je hieronder.

1	2	3	4	5
5	4	3	2	1
1	5	4	3	2
2	1	5	4	3
3	2	1	5	4
4	3	2	1	5

(b) Bekijk een 10×10-bord dat volgens de regels is ingevuld. Elke kolom bevat dus de getallen 1 tot en met 10. In kolom 1 zijn 9 vakjes grijs (de vakjes met '2' tot en met '10'), in kolom 2 zijn 8 vakjes grijs (de vakjes met '3' tot en met '10'), in kolom 3 zijn 7 vakjes grijs (de vakjes met '4' tot en met '10') etc. In totaal zijn $9 + 8 + 7 + \cdots + 0 = 45$ vakjes grijs. Omdat 45 niet deelbaar is door 10, is het niet mogelijk dat elke rij evenveel grijze vakjes heeft.

$\square$

HOOFDSTUK 6

Handig vergelijkingen combineren – Uitwerkingen

Opgave 6.1.
Alice heeft vijf reële getallen $a < b < c < d < e$. Hiervan telt ze elk tweetal getallen bij elkaar op en noteert de tien uitkomsten. De drie kleinste uitkomsten blijken 32, 36 en 37 te zijn, terwijl de twee grootste uitkomsten 48 en 51 zijn. Bepaal e.

Tweede ronde 2010, B1

Antwoord: $\frac{55}{2}$
Uitwerking: Van de tien uitkomsten $32, 36, 37, \ldots, 48, 51$ is $d+e$ de grootste en $c+e$ de op een na grootste. Er moet dus gelden dat $d+e = 51$ en $c+e = 48$, dus d is 3 groter dan c. Verder is $a+b$ de kleinste uitkomst en $a+c$ de op een na kleinste, zodat $a+b = 32$ en $a+c = 36$. Dus b is 4 kleiner dan c. De getallen a, b, c, d en e zijn dus te schrijven als a, $c-4$, c, $c+3$ en e.
De op twee na kleinste uitkomst kan zowel $a+d$ als $b+c$ zijn. We weten echter dat

$$a + d = a + c + 3 = 36 + 3 = 39.$$

Blijkbaar is $a+d$ niet de op twee na kleinste uitkomst. Maar dan moet gelden dat $b+c = 37$, oftewel $c - 4 + c = 37$. Hieruit volgt $c = \frac{41}{2}$, dus $e = 48 - \frac{41}{2} = \frac{55}{2}$. □

Opgave 6.2.
In het getallenvierkant hiernaast staan positieve getallen. Het *product* van de getallen in iedere rij, iedere kolom en elk van de twee diagonalen is steeds hetzelfde.
Welk getal staat op de plaats van H?

$\frac{1}{2}$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

Tweede ronde 2013, B4

Antwoord: $\frac{1}{4}$
Uitwerking: Het product van de getallen in de tweede rij is gelijk aan het product van de getallen in de eerste kolom. Dat wil zeggen dat $C \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot 4 \cdot F$, waar we links en rechts C kunnen wegdelen. Er volgt dan dat $F = 16$. Nu bekijken we de onderste rij en de tweede kolom, waarvan ook weer het product gelijk moet zijn. Dat wil zeggen dat $16 \cdot G \cdot H \cdot 16 = 32 \cdot 2 \cdot 1 \cdot G$, waaruit G weer links en rechts wegvalt. Dus $H = \frac{1}{4}$. Hiernaast staat een mogelijke oplossing met $H = \frac{1}{4}$. □

$\frac{1}{2}$	32	8	1
4	2	8	2
4	1	8	4
16	2	$\frac{1}{4}$	16

Opgave 6.3.
In een klas zitten 23 leerlingen die elk precies één vreemde taal hebben gekozen, namelijk Duits of Frans. Er zitten in totaal 10 meisjes in de klas, en er zijn in totaal 11 leerlingen die Frans doen. Het aantal meisjes dat Frans heeft gekozen plus het aantal jongens dat Duits heeft gekozen, is 16.
Hoeveel meisjes hebben Frans gekozen?

Tweede ronde 2011, B3

Antwoord: 7
Uitwerking: We noemen m_{Frans} het aantal meisjes met Frans, m_{Duits} het aantal meisjes met Duits, j_{Frans} het aantal jongens met Frans en j_{Duits} het aantal jongens met Duits. De gegevens uit de opgave kunnen we dan in vergelijkingen verwerken:

$$\begin{aligned} m_{\text{Frans}} + m_{\text{Duits}} + j_{\text{Frans}} + j_{\text{Duits}} &= 23, \\ m_{\text{Frans}} + m_{\text{Duits}} &= 10, \\ m_{\text{Frans}} + j_{\text{Frans}} &= 11, \\ m_{\text{Frans}} + j_{\text{Duits}} &= 16. \end{aligned}$$

We gaan nu de laatste drie vergelijkingen bij elkaar optellen:

$$(m_{\text{Frans}} + j_{\text{Duits}}) + (m_{\text{Frans}} + j_{\text{Frans}}) + (m_{\text{Frans}} + m_{\text{Duits}}) = 16 + 11 + 10,$$

oftewel

$$3 \cdot m_{\text{Frans}} + m_{\text{Duits}} + j_{\text{Frans}} + j_{\text{Duits}} = 37,$$

dus

$$2 \cdot m_{\text{Frans}} + (m_{\text{Frans}} + m_{\text{Duits}} + j_{\text{Frans}} + j_{\text{Duits}}) = 37.$$

Nu kunnen we links het stuk tussen haakjes vervangen door 23:

$$2 \cdot m_{\text{Frans}} + 23 = 37.$$

Het aantal meisjes met Frans is dus gelijk aan $\frac{37-23}{2} = \frac{14}{2} = 7$. □

Opgave 6.4.
Bepaal een drietal gehele getallen (a, b, c) dat voldoet aan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 756 \\ a^2 &= bc \end{aligned}$$

Eerste ronde 2009, B4

Antwoord: $(a, b, c) = (-12, 6, 24)$ of $(a, b, c) = (-12, 24, 6)$
Uitwerking: We drukken $(b+c)^2$ op twee manieren uit in a. $(b+c)^2 = (18-a)^2 = 324-36a+a^2$ en $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = (756 - a^2) + 2a^2$. Dus $a^2 - 36a + 324 = a^2 + 756$, oftewel $-36a = 756 - 324 = 432$, dus $a = -12$. Vullen we dit in de eerste en laatste vergelijking in, dan vinden we dat $b + c = 30$ en $bc = 144$. We substitueren $c = 30 - b$ in de laatste vergelijking, wat leidt tot de tweedegraadsvergelijking $b(30 - b) = 144$ oftewel $b^2 - 30b + 144 = 0$. Uit de ontbinding $(b-6)(b-24) = 0$ volgen de twee oplossingen $b = 6$ (en $c = 24$) of $b = 24$ (en $c = 6$).

Alternatieve uitwerking: We vinden net als hierboven dat $a = -12$. Hieruit volgt door invullen dat $b+c = 30$, $b^2+c^2 = 756-144 = 612$ en $bc = 144$. Combineren van de laatste twee geeft $(b-c)^2 = b^2+c^2-2bc = 612-2\cdot 144 = 324$, oftewel $b-c = \pm\sqrt{324} = \pm 18$. Optellen van $b+c = 30$ en $b-c = -18$ geeft $2b = (b+c)+(b-c) = 12$ dus $b = 6$ en bijgevolg $c = 24$. Optellen van $b+c = 30$ en $b-c = 18$ geeft $2b = (b+c)+(b-c) = 48$ dus $b = 24$ en bijgevolg $c = 6$. □

Opgave 6.5.
Dertig scholieren doen mee aan een wiskundewedstrijd met zestien vragen. Bij elke vraag moeten ze een getal als antwoord geven. Voor elke vraag die een scholier binnen een minuut goed beantwoordt, krijgt hij 10 punten. Voor elke vraag die hij goed beantwoordt, maar niet binnen een minuut, krijgt hij 5 punten. Voor elke vraag die hij fout beantwoordt, krijgt hij 0 punten.
Na afloop van de wedstrijd blijkt dat van alle 480 antwoorden meer dan de helft goed is en binnen een minuut gegeven. Het aantal antwoorden dat goed is, maar niet binnen een minuut gegeven, blijkt gelijk te zijn aan het aantal foute antwoorden.
Laat zien dat er twee scholieren zijn die precies dezelfde totaalscore hebben gehaald.

Tweede ronde 2011, C2

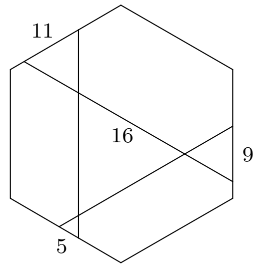
Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: Alle mogelijke scores zijn veelvouden van 5. De laagste score die een scholier kan halen is 0 en de hoogste score is $16\cdot 10 = 160$. Stel nu eens dat er geen twee scholieren zijn met dezelfde score. Dan is de gezamelijke score van de scholieren niet meer dan $160+155+150+\cdots+15 = \frac{1}{2}\cdot 175\cdot 30 = 2625$. We zullen hieruit een tegenspraak afleiden.

Het aantal antwoorden dat goed is en ook binnen een minuut gegeven, noemen we A. Het aantal antwoorden dat goed is, maar niet binnen een minuut gegeven, noemen we B. Tenslotte noemen we het aantal foute antwoorden C. De scholieren hebben samen $16\cdot 30 = 480$ vragen beantwoord, dus $A+B+C = 480$. Meer dan de helft van de vragen is binnen een minuut goed beantwoord, dus $A > 240$. Verder is gegeven dat $B = C$, zodat $B = C = \frac{480-A}{2}$. We kunnen nu de gezamelijke score van de scholieren uitdrukken in A. Deze is:

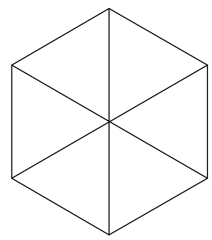
$$10\cdot A + 5\cdot B + 0\cdot C = 10\cdot A + 5\cdot\frac{480-A}{2} = \tfrac{15}{2}A + 1200.$$

Omdat $A > 240$, is de gezamelijke score van de scholieren groter dan $\frac{15}{2}\cdot 240 + 1200 = 3000$. Maar uit de aanname dat alle scores verschillend zijn, hadden we afgeleid dat de gezamelijke score hoogstens 2625 is, een tegenspraak. We concluderen dat de aanname fout was en er dus wel twee scholieren zijn met dezelfde score. □

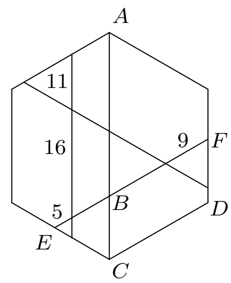
Opgave 6.6.
Een regelmatige zeshoek is door lijnen evenwijdig aan de zijden in zeven stukken verdeeld zoals in de figuur. Vier van de stukken zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan de lengtes van de zijden in de figuur aangegeven zijn. Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek?



Tweede ronde 2013, B5



Antwoord: 19
Uitwerking: Door de regelmatige zeshoek in zes kleine gelijkzijdige driehoeken te verdelen, zien we dat de lengte van de lange diagonaal AC tweemaal de zijdelengte van de zeshoek is. We berekenen driemaal de zijdelengte, namelijk $|AB| + |BC| + |CD|$. Lijnstuk AB is de zijde van een parallellogram, waarvan de daaraan evenwijdige zijde lengte $11 + 16 = 27$ heeft. Er geldt dus dat $|AB| = 27$.



Omdat driehoek BCE gelijkzijdig is, volgt dat $|BC| = |EB|$.

Omdat $BCDF$ een parallellogram is, volgt dat $|CD| = |BF|$.

Ten slotte lezen we af dat $|EB| + |BF| = |EF| = 5 + 16 + 9 = 30$.

Alles tezamen vinden we dat driemaal de zijdelengte gelijk is aan

$$|AB| + |BC| + |CD| = 27 + |EB| + |BF| = 27 + 30 = 57.$$

De zijdelengte is dus $\frac{57}{3} = 19$.

□

Opgave 6.7.
Vind alle drietallen (x, y, z) van reële getallen waarvoor geldt dat

$$x + y - z = -1, \qquad x^2 - y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{en} \qquad -x^3 + y^3 + z^3 = -1.$$

Finale 2013, opgave 2

Antwoord: *Bij de opgaven van de finale wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: De eerste vergelijking geeft $z = x + y + 1$. Dit vullen we in de tweede vergelijking in, zodat we vinden: $x^2 - y^2 + (x + y + 1)^2 = 1$. Uitwerken geeft $2x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$, oftewel $2(x + y)(x + 1) = 0$. We zien nu dat $x + y = 0$ of $x + 1 = 0$. We bekijken de twee gevallen apart.

- Als $x + y = 0$, dan geldt $y = -x$. De eerste vergelijking geeft $z = 1$. Invullen in de derde vergelijking geeft $-x^3 + (-x)^3 + 1^3 = -1$, oftewel $x^3 = 1$. We zien dat $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.
- Als $x + 1 = 0$, dan geldt $x = -1$. De eerste vergelijking geeft $z = y$. Invullen in de derde vergelijking geeft $-(-1)^3 + y^3 + y^3 = -1$, oftewel $y^3 = -1$. Dus $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$.

We vinden in totaal dus twee mogelijke oplossingen. Invullen in de oorspronkelijke vergelijkingen laat zien dat dit ook inderdaad oplossingen zijn. □

HOOFDSTUK 7

Logisch redeneren – Uitwerkingen

Opgave 7.1.
Op de plaatsen van de sterretjes staan positieve gehele getallen op zo'n manier dat de vermenigvuldigingstabel hiernaast klopt.
Wat is het grootste getal dat meer dan één keer voorkomt in de 5×5-tabel?

$\times$	$*$	$*$	$*$	7
$*$	24	$*$	$*$	56
$*$	$*$	36	8	$*$
$*$	$*$	27	6	$*$
6	18	$*$	$*$	42

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18

Eerste ronde 2012, A1

Antwoord: D) 12
Uitwerking: Bekijk het linker plaatje. Op de plaats van het sterretje moet een getal staan waar 27 en 6 beide deelbaar door zijn. Dit geeft twee mogelijkheden: 1 of 3. De eerste mogelijkheid valt af, want dan zou op de plek van de dubbele ster het getal 27 staan, terwijl 36 hier niet door deelbaar is.
Met de tweede mogelijkheid kunnen we de hele tabel stap voor stap invullen (zie het rechter plaatje). We zien dat 12 het grootste getal is dat tweemaal voorkomt.

$\times$		$**$		7
	24			56
		36	8	
$*$		27	6	
6	18			42

$\times$	3	9	2	7
8	24	72	16	56
4	12	36	8	28
3	9	27	6	21
6	18	54	12	42

□

Opgave 7.2.
Aline, Bram en Cas doen mee aan een wiskundewedstrijd met 12 vragen. Vooraf zijn ze enigszins pessimistisch en doen ze de volgende uitspraken.

Aline: "Bram zal minstens twee vragen meer goed hebben dan ik."
Bram: "Ik zal niet meer dan vijf vragen goed hebben."
Cas: "Ik zal hoogstens zoveel vragen goed hebben als Aline."

Hun leraar probeert hun moed in te spreken en zegt: "Samen hebben jullie vast meer dan 18 vragen goed." Na afloop blijken zowel alle drie de leerlingen als hun leraar een foute voorspelling te hebben gedaan. Wie heeft/hebben het kleinste aantal vragen goed beantwoord?

A) alleen Aline B) alleen Bram C) alleen Cas
D) zowel Aline als Bram E) dat kun je niet met zekerheid zeggen

Eerste ronde 2011, A4

Antwoord: A) alleen Aline
Uitwerking: Aangezien de voorspelling van Bram fout was, heeft Bram minstens zes vragen goed. De voorspelling van Aline was ook fout, zodat Bram hoogstens één vraag meer goed heeft dan Aline. Aline heeft dus minstens vijf vragen goed. Omdat de voorspelling van Cas fout was, heeft hij meer vragen goed dan Aline, dus minstens zes.
We bekijken nu de mogelijkheden voor Aline. Stel eerst dat ze meer dan vijf vragen goed heeft. Dan zou Cas minstens zeven vragen goed hebben en zijn er in totaal minstens $6 + 6 + 7 = 19$ vragen goed, zoals de docent (fout) voorspelde. Dit klopt dus niet. We concluderen dat Aline vijf vragen goed heeft. Aangezien de andere twee minstens zes vragen goed hebben, heeft Aline het kleinste aantal vragen goed. □

Opgave 7.3.
In deze optelsom staat elke letter voor een cijfer (0 tot en met 9). Verschillende letters staan voor verschillende cijfers.
Bepaal de waarde van $\text{W} \times \text{R}$.

$$\begin{array}{cccccc} T & W & E & E & D & E \\ & R & O & N & D & E + \\ \hline 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Tweede ronde 2012, B1

Antwoord: 32
Uitwerking: We werken van rechts naar links door de optelling. Er geldt $2\text{E} = 12$ of $2\text{E} = 2$. Het tweede geval valt af omdat 2D dan gelijk zou zijn aan 1 of 11. Dus $\text{E} = 6$.

Er geldt $\text{D} = 0$ of $\text{D} = 5$. Het tweede geval valt af want dan zou $\text{E} + \text{N} + 1 = 13$ oftewel $\text{N} = 6$ gelden, terwijl de 6 al door E is bezet. We concluderen dat $\text{D} = 0$ en $\text{E} + \text{N} = 13$, zodat $\text{N} = 7$.

Uit $\text{E} + \text{O} + 1 = 10$ volgt dat $\text{O} = 3$. We zien dat $\text{W} + \text{R} = 12$ of $\text{W} + \text{R} = 2$. Het tweede geval valt af, want de 0 is al bezet, zodat $\text{W} + \text{R} \geqslant 1 + 2 = 3$. Dus $\text{W} + \text{R} = 12$ (en $\text{T} = 1$).

De mogelijkheden voor het paar $\{\text{W}, \text{R}\}$ zijn $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$ en $\{5, 7\}$. De eerste en laatste mogelijkheid vallen af, want cijfers 3 en 7 zijn al bezet. We concluderen dat $\text{W} \cdot \text{R} = 8 \cdot 4 = 32$. □

Opgave 7.4.
Eén van de vier kabouters Anne, Bert, Chris en Dirk heeft goud gestolen van de koning. De kabouters, die elkaar door en door kennen, doen hierover elk twee uitspraken. Als een kabouter een leugenaar is, is minstens één van die twee uitspraken een leugen. Is een kabouter geen leugenaar, dan zijn beide uitspraken waar.

Anne zegt: "Bert is een leugenaar." en "Chris of Dirk heeft het gedaan."
Bert zegt: "Chris is een leugenaar." en "Dirk of Anne heeft het gedaan."
Chris zegt: "Dirk is een leugenaar." en "Anne of Bert heeft het gedaan."
Dirk zegt: "Anne is een leugenaar." en "Bert of Chris heeft het gedaan."

Hoeveel van deze acht uitspraken zijn waar?

Tweede ronde 2012, B3

Antwoord: 5
Uitwerking: Bekijk eerst het geval waarin Anne heeft gestolen van de koning. Dan zijn de twee laatste uitspraken van Bert en Chris waar en die van Anne en Dirk onwaar. Anne en Dirk zijn dus leugenaars. Aangezien de twee uitspraken van Chris allebei waar zijn, is Chris geen leugenaar. Daaruit concluderen we dat Bert een leugenaar is, want zijn eerste uitspraak is gelogen. Nu we van iedereen weten of hij/zij een leugenaar is, tellen we eenvoudig dat van de acht uitspraken er vijf waar zijn.

Je kunt een soortgelijke redenering houden voor de gevallen waarin Bert, Chris en Dirk hebben gestolen van de koning. Omdat het probleem symmetrisch is (cyclisch verwisselen van de namen 'Anne', 'Bert', 'Chris' en 'Dirk' verandert het probleem niet), vinden we telkens hetzelfde antwoord: vijf van de uitspraken zijn waar. □

Opgave 7.5.
Bepaal alle positieve gehele getallen n van vier cijfers waarvoor geldt dat n plus de som van de cijfers van n gelijk is aan 2010.

Tweede ronde 2010, C1

Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: Stel dat n een geheel getal van vier cijfers is. We schrijven $n = 1000a + 100b + 10c + d$, waarbij a, b, c en d de cijfers van n zijn. Er geldt dus $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 9$ en omdat een getal nooit met een nul begint ook $a > 0$.
Nu willen we weten voor welke n er geldt dat $n+(a+b+c+d) = 1001a+101b+11c+2d = 2010$. Omdat $1001 \cdot 3$ al groter is dan 2010, moet er gelden dat $a < 3$ en dus $a = 1$ of $a = 2$. We proberen beide gevallen.

1. Als $a = 1$, dan moet gelden dat $101b + 11c + 2d = 2010 - 1001 \cdot 1 = 1009$. We gaan nu de mogelijke waarden voor b bepalen.
   Er geldt dat $0 \leqslant 11c + 2d \leqslant 13 \cdot 9 = 117$. Omdat $101b = 1009 - (11c + 2d)$ volgt hieruit ook dat $1009 \geqslant 101b \geqslant 1009 - 117 = 892$. We zoeken dus de 101-vouden tussen 892 en 1009, omdat $101b$ een 101-voud is. Het enige 101-voud tussen 892 en 1009 is 909 en er moet gelden dat $b = 9$.
   Nu moet gelden dat $11c + 2d = 1009 - 909 = 100$. Nu gaan we de mogelijke waarden voor c bepalen.
   Er geldt dat $0 \leqslant 2d \leqslant 2 \cdot 9 = 18$. Omdat $11c = 100 - 2d$ volgt hieruit ook dat $100 \geqslant 11c \geqslant 100 - 18 = 82$. Aangezien $11c = 100 - 2d$ even moet zijn, moet $11c$ gelijk zijn aan een even 11-voud tussen 82 en 100. Het enige even 11-voud tussen 82 en 100 is 88. Er moet dus gelden dat $c = 8$ en $d = 6$.
   Als mogelijke oplossing vinden we dan $n = 1986$.

2. Als $a = 2$, dan moet gelden dat $101b + 11c + 2d = 2010 - 1001 \cdot 2 = 8$.
   We zien direct dat hieruit moet volgen dat $b = c = 0$ en dus $d = 4$.
   Als mogelijke oplossing vinden we $n = 2004$.

Nu controleren we of de oplossingen 1986 en 2004 ook daadwerkelijk aan de beginvoorwaarden voldoen. Er geldt inderdaad dat $1986 + 1 + 9 + 8 + 6 = 2010$ en $2004 + 2 + 0 + 0 + 4 = 2010$. Dus zijn $n = 1986$ en $n = 2004$ de enige twee oplossingen. $\square$

HOOFDSTUK 8

Goochelen met algebra – Uitwerkingen

Opgave 8.1.
Voor het getal x geldt: $x = \dfrac{1}{1+x}$. Bereken $x - \dfrac{1}{x}$. Vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk.

Eerste ronde 2011, B1

Antwoord: -1
Uitwerking: Gegeven is dat $x = \dfrac{1}{1+x}$. We zien dat $x \neq 0$, want $0 \neq \frac{1}{1}$. We kunnen dus links en rechts de breuk omkeren. Dit geeft $\dfrac{1}{x} = 1 + x$. Hieruit volgt $x - \dfrac{1}{x} = x - (1 + x) = -1$. □

Opgave 8.2.
Voor een getal x geldt dat $x + \frac{1}{x} = 5$. We definiëren $n = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Het blijkt dat n een geheel getal is.
Bereken n. (Schrijf n in gewone decimale notatie.)

Eerste ronde 2008, B3

Antwoord: 110
Uitwerking: Uit

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

volgt dat

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 5^3 - 3 \times 5 = 110.$$

□

Alternatieve uitwerking: Uit $x + \frac{1}{x} = 5$ volgt $x = 5 - \frac{1}{x}$. Vermenigvuldigen met x geeft nu $x^2 = 5x - 1$ en nog een keer vermenigvuldigen met x geeft

$$x^3 = 5x^2 - x = 5(5x - 1) - x = 25x - 5 - x = 24x - 5.$$

Ook hebben we $\frac{1}{x} = 5 - x$, dus $\frac{1}{x^2} = \frac{5}{x} - 1$. En ook

$$\frac{1}{x^3} = \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} = 5\left(\frac{5}{x} - 1\right) - \frac{1}{x} = \frac{25}{x} - 5 - \frac{1}{x} = \frac{24}{x} - 5.$$

Dus
$$n = x^3 + \frac{1}{x^3} = 24x - 5 + \frac{24}{x} - 5 = 24\left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 24 \cdot 5 - 10 = 110.$$
□

Opgave 8.3.
We noemen een drietal (x, y, z) *goed* als x, y en z positieve gehele getallen zijn met $y \geqslant 2$ en er bovendien geldt dat $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.
Een voorbeeld van een goed drietal is $(19, 6, 16)$, want er geldt: $6 \geqslant 2$ en $19^2 - 3 \cdot 6^2 = 16^2 - 3$.
Vind een goed drietal (x, y, z) waarbij x *even* is.

Tweede ronde 2013, C2(b)

Antwoord: Bijvoorbeeld $(16, 9, 4)$.
Uitwerking: Het geven van een geschikt drietal, en laten zien dat die voldoet, is al een volledige oplossing. Om op zo'n drietal te komen zou je bijvoorbeeld de volgende aanpak kunnen volgen. We kunnen de vergelijking herschrijven naar $x^2 - z^2 = 3y^3 - 3$. Dit kunnen we ontbinden aan beide kanten: $(x - z)(x + z) = 3(y - 1)(y + 1)$. Met behulp van deze nieuwe schrijfwijze kunnen we gemakkelijker op zoek naar drietallen die voldoen, door steeds een getal voor y te proberen. Probeer bijvoorbeeld $y = 4$. Dan staat er aan de rechterkant $3 \cdot 3 \cdot 5$, dus wordt de linkerkant $5 \cdot 9$ of $3 \cdot 15$ of $1 \cdot 45$. Voor x krijgen we nu steeds het gemiddelde van de twee factoren, dus bij deze drie mogelijkheden wordt dat $x = 7$, $x = 9$ en $x = 23$, allemaal niet even. Na nog wat verder proberen op dezelfde manier blijken $y = 7$ en $y = 9$ wel een even waarde voor x te geven. Zo vind je bij $y = 9$ het drietal $(16, 9, 4)$. □

Opgave 8.4.
Bepaal alle positieve gehele getallen m waarvoor geldt dat zowel $m - 110$ als $m + 110$ het kwadraat van een geheel getal is.

Voorbeeldopgaven tweede ronde 2010, C2

Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: Neem zo'n m en laat a en b gehele getallen zijn zodat $m-110 = a^2$ en $m+110 = b^2$. Door eventueel a te vervangen door $-a$ of b door $-b$, zien we in dat we wel mogen aannemen dat $a \geqslant 0$ en $b \geqslant 0$. Omdat $b^2 = m + 110$ groter is dan $a^2 = m - 110$, geldt dan $b > a$. Dus $b - a > 0$. Bovendien is $b > 0$, dus $b + a > 0$.

We kijken nu naar het verschil van deze twee kwadraten: $b^2 - a^2 = (m+110) - (m-110) = 220$. Door de linkerkant hiervan in factoren te ontbinden, vinden we de volgende vergelijking:
$$(b - a)(b + a) = 220. \tag{8.1}$$
Met deze vergelijking gaan we verder werken. De rechterkant is even, dus de linkerkant moet ook even zijn. Dus $b - a$ of $b + a$ is even. Maar stel dat $b - a$ even is, dan is $b + a = (b - a) + 2a$ ook even. En andersom, als $b + a$ even is, dan is $b - a = (b + a) - 2a$ ook even. Dus ze zijn allebei even. We kunnen dus schrijven: $b - a = 2c$, $b + a = 2d$ voor gehele getallen $c > 0$ en $d > 0$. Nu verandert onze vergelijking in $2c \cdot 2d = 220$ oftewel $c \cdot d = 55$.

Om 55 als een product van twee positieve gehele getallen te schrijven, bekijken we de positieve gehele getallen waar 55 deelbaar door is. Dit zijn alleen 1, 5, 11 en 55. Dus we kunnen 55 op twee manieren schrijven als het product van twee positieve gehele getallen schrijven: $55 = 1 \cdot 55$ en $55 = 5 \cdot 11$. Er geldt $b + a \geqslant b - a$, dus $d \geqslant c$, dus het kleinste getal hoort altijd bij c en het grootste getal bij d. We krijgen dus twee mogelijkheden.

Het eerste geval: $c = 1$ en $d = 55$. Nu geldt $b - a = 2c = 2$ en $b + a = 2d = 110$. Hieruit volgt $2b = (b - a) + (b + a) = 112$, dus $b = 56$. We berekenen $m = b^2 - 110 = 3026$.

Het tweede geval: $c = 5$ en $d = 11$. Nu geldt $b - a = 2c = 10$ en $b + a = 2d = 22$. Hieruit volgt $2b = (b - a) + (b + a) = 32$, dus $b = 16$. We berekenen $m = b^2 - 110 = 146$.

We hebben nu laten zien dat de enige twee mogelijkheden voor m zijn: $m = 3026$ en $m = 146$. We controleren ten slotte nog of deze allebei echt voldoen, dus of $m - 110$ en $m + 110$ beide kwadraten zijn in allebei de gevallen. Er geldt

$$3026 - 110 = 2916 = 54^2, \quad 3026 + 110 = 3136 = 56^2,$$

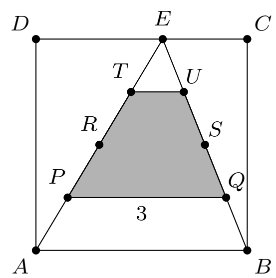
$$146 - 110 = 36 = 6^2, \quad 146 + 110 = 256 = 16^2.$$

Dus beide mogelijkheden voldoen. De gevraagde getallen m zijn dus $m = 3026$ en $m = 146$. $\square$

HOOFDSTUK 9

Gelijkvormigheid – Uitwerkingen

Opgave 9.1.
Op zijde CD van een vierkant $ABCD$ ligt een punt E. Lijnstuk AE wordt door de punten P, R en T in vier gelijke stukken verdeeld. Lijnstuk BE wordt door de punten Q, S en U in vier gelijke stukken verdeeld. Gegeven is dat $|PQ| = 3$.
Wat is de oppervlakte van vierhoek $PQUT$?

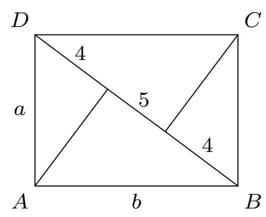


A) $\frac{15}{4}$ B) 4 C) $\frac{17}{4}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 5

Eerste ronde 2012, A6

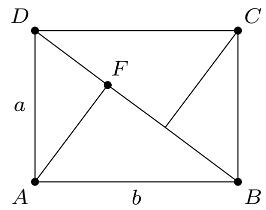
Antwoord: B) 4
Uitwerking: Driehoek EAB, driehoek EPQ en driehoek ETU zijn gelijkvormig, omdat $|AE| : |PE| : |TE| = 4 : 3 : 1 = |BE| : |QE| : |UE|$ en $\angle AEB = \angle PEQ = \angle TEU$ (snavelfiguren). Hieruit volgt dat $|AB| : |PQ| : |TU| = 4 : 3 : 1$. Hieruit volgt dat $|AB| = 4$, zodat de oppervlakte van driehoek ABE gelijk is aan $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.
Vanwege de gelijkvormigheid hebben driehoeken PQE en TUE daarom oppervlakte $(\frac{3}{4})^2 \times 8 = \frac{9}{2}$ respectievelijk $(\frac{1}{4})^2 \times 8 = \frac{1}{2}$. De oppervlakte van de vierhoek is dus $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$. □

Opgave 9.2.
Een rechthoek $ABCD$ heeft zijden a en b, waarbij $a < b$. De loodlijnen uit A en C op de diagonaal BD verdelen die diagonaal in drie stukken met lengtes 4, 5 en 4.
Bereken $\frac{b}{a}$.



Eerste ronde 2013, B2

Antwoord: $\frac{3}{2}$
Uitwerking: Driehoeken ADF, BDA en BAF zijn gelijkvormig wegens gelijke hoeken. Daarom geldt



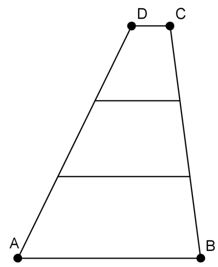
$$\frac{b}{a} = \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|AF|}{|DF|} = \frac{|BF|}{|AF|}.$$

Oftewel

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{|AF|}{|DF|} \cdot \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{|DF|} = \frac{9}{4}.$$

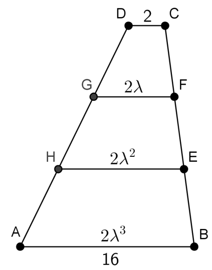
Dus vinden we $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$. □

Opgave 9.3.
Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met zijden $|AB| = 16$, $|BC| = 21$, $|CD| = 2$ en $|DA| = 28$. Verder is AB evenwijdig met CD. Twee lijnen die evenwijdig zijn met AB en CD verdelen vierhoek $ABCD$ in drie gelijkvormige vierhoeken. Bereken de omtrek van de kleinste van die drie vierhoeken.



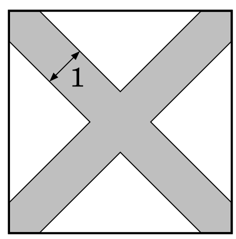
Eerste ronde 2007, B2

Antwoord: 13
Uitwerking: We noemen λ de factor die zit tussen de bovenste en onderste horizontale zijden van elke kleine vierhoek. Dus $|FG| = 2\lambda$. Omdat de onderste zijde van de bovenste vierhoek weer de bovenste zijde van de volgende vierhoek is, wordt $|EH| = 2\lambda^2$. En net zo is dan $|AB| = 2\lambda^3$. Maar we weten ook $|AB| = 16$, dus $\lambda^3 = 8$, waaruit volgt $\lambda = 2$.



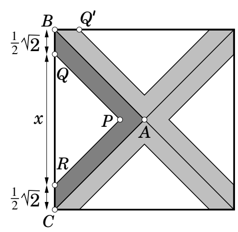
Noem nu $|CF| = x$, dan is $|FE| = \lambda \cdot x = 2x$ en $|EB| = 4x$. Dus samen is $|BC| = 7x$, maar ook $|BC| = 21$, dus $x = 3$. Op dezelfde manier vinden we $|DA| = 7 \cdot |DG|$ maar ook $|DA| = 28$, dus $|DG| = 4$. Verder wisten we inmiddels dat $|FG| = 2\lambda = 4$. De omtrek van de kleinste vierhoek is dus $2 + 4 + 4 + 3 = 13$. □

Opgave 9.4.
Met een brede kwast worden de diagonalen van een vierkante tegel geverfd, zie de figuur. Precies de helft van het oppervlak van de tegel is geverfd. De breedte van de verfkwast is 1, zoals aangegeven. Bereken de lengte van de zijde van de tegel.



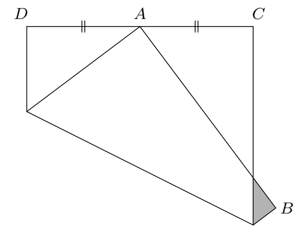
Eerste ronde 2009, B3

Antwoord: $2 + 2\sqrt{2}$
Uitwerking: We kunnen volstaan met het bekijken van een kwart van de tegel: $\triangle ABC$. De oppervlakte van $\triangle PQR$ is de helft van die van $\triangle ABC$. De driehoeken zijn gelijkvormig en de oppervlaktes schelen een factor 2. Dus de schuine zijden verhouden zich als $1 : \sqrt{2}$, dus $|QR| : |BC| = 1 : \sqrt{2}$. Nu berekenen we $|BQ|$ met Pythagoras in $\triangle BQQ'$: $2|BQ|^2 = |BQ'|^2 + |BQ|^2 = 1^2$, dus $|BQ| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Met $x = |QR|$ vinden we dan $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot x$, dus $x(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$ oftewel $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2 + \sqrt{2}$. Dan geldt dus $|BC| = x + \sqrt{2} =$



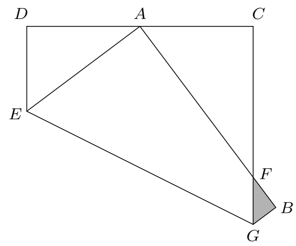
$2 + 2\sqrt{2}$. □

Opgave 9.5.
Een vierkant $ABCD$ met zijde 8 wordt zodanig gevouwen dat hoekpunt A met het midden van CD samenvalt (zie figuur).
Wat is de oppervlakte van het grijze driehoekje?

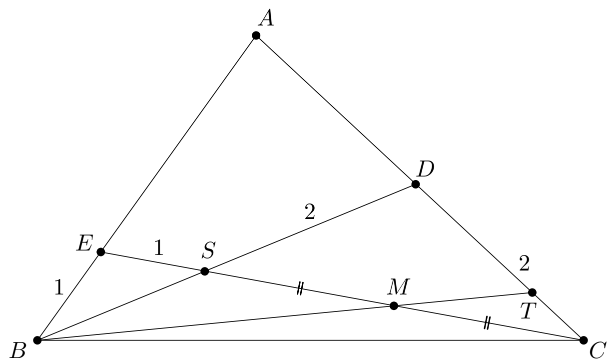


Tweede ronde 2012, B5

Antwoord: $\frac{2}{3}$
Uitwerking: We introduceren de punten E, F en G zoals aangegeven in de figuur. Stel nu dat $|DE| = x$. Dan geldt $|AE| = 8 - x$, omdat de zijde van het vierkant lengte 8 heeft. Met de stelling van Pythagoras volgt $(8-x)^2 = |AE|^2 = |DE|^2 + |AD|^2 = x^2 + 16$. Oplossen geeft $x = 3$. Merk op dat $\angle CAF = 180° - \angle DAE - \angle EAB = 90° - \angle DAE = \angle DEA$. Verder geldt $\angle ADE = 90° = \angle FCA$. De driehoeken DEA en CAF zijn daarom gelijkvormig. Hieruit volgt $\frac{1}{4}|AF| = \frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|EA|}{|DE|} = \frac{5}{3}$ en dus $|AF| = \frac{20}{3}$. Ook krijgen we $\frac{1}{4}|CF| = \frac{|CF|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{4}{3}$ en dus $|CF| = \frac{16}{3}$. Nu volgt dat $|BF| = 8 - |AF| = \frac{4}{3}$. Hoeken $\angle CFA$ en $\angle BFG$ zijn gelijk (overstaande hoeken). Bovendien zijn hoeken $\angle ACF$ en $\angle GBF$ beide 90° en dus gelijk. Daarom zijn driehoeken CFA en BFG gelijkvormig. Hieruit volgt $\frac{3}{4}|BG| = \frac{|BG|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|CF|} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}$ en dus $|BG| = 1$. De oppervlakte van de grijze driehoek is nu $\frac{1}{2} \cdot |BG| \cdot |BF| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. □



Opgave 9.6.
Gegeven is een driehoek ABC met op lijnstuk AC een punt D en op lijnstuk AB een punt E. Het snijpunt van BD en CE noemen we S. Het midden van lijnstuk CS noemen we M. De lijn BM snijdt lijnstuk CD in punt T. Ten slotte is gegeven dat $|BE| = |ES| = 1$ en $|CD| = |DS| = 2$.
Bewijs dat $|AB| = |AT|$.



Tweede ronde 2012, C2

Antwoord: *Bij de C-opgaven van de tweede ronde wordt een volledige uitwerking gevraagd, dus alleen een antwoord is niet voldoende.*
Uitwerking: Merk op dat $\angle ESB = \angle DSC$ vanwege overstaande hoeken. Verder zijn driehoeken BES en SDC gelijkbenig waardoor geldt $\angle EBS = \angle ESB = \angle DSC = \angle DCS$. Hieruit volgt dat driehoeken BES en SDC gelijkvormig zijn. In het bijzonder geldt $|BS| = \frac{|BS|}{|BE|} = \frac{|SC|}{|SD|} = \frac{1}{2}|SC| = |SM|$. Driehoek BSM is dus gelijkbenig en er volgt $\angle SBM = \angle SMB = \angle TMC$ vanwege overstaande hoeken. Vanwege het feit dat de hoekensom van

een driehoek 180° is, vinden we $\angle TMC = 180^\circ - \angle MTC - \angle TCM$ en dus ook $\angle ATB = 180^\circ - \angle MTC = \angle TMC + \angle TCM$. We hadden al eerder gevonden dat $\angle TMC = \angle SBM$ en $\angle TCM = \angle DCS = \angle ABS$. Er geldt nu dus $\angle ATB = \angle SBM + \angle ABS = \angle ABT$. Hieruit volgt dat driehoek BAT gelijkbenig is met top A, dus $|AB| = |AT|$. $\square$

HOOFDSTUK 10

Blikwisseling – Uitwerkingen

Opgave 10.1.
Op een feestje zijn 33 mensen. Sommige mensen schudden handen met elkaar om elkaar te begroeten, anderen niet. We vragen aan elke feestganger aan het eind van het feestje hoeveel handen hij of zij heeft geschud. Al deze getallen tellen we bij elkaar op. Is dit antwoord even of oneven, of kun je dit niet weten?

Antwoord: Even
Uitwerking: Bekijk het niet per persoon, maar per handenschudactie. We houden het bij op een lijst. Bij elke keer handen schudden zijn twee personen betrokken en bij deze twee personen zetten we dan een streepje op de lijst. In totaal wordt dus een even aantal streepjes gezet. Het aantal streepjes is precies gelijk aan de uitkomst die in de opgave gevraagd wordt. Dit is dus even. $\square$

Opgave 10.2.
Een digitale klok geeft in de loop van een dag de tijden 00:00:00 t/m 23:59:59 aan. Iedere seconde van de dag kun je de cijfers optellen en zo ontstaat er steeds een geheel getal. Om 13:07:14 is die som bijvoorbeeld $1+3+0+7+1+4=16$. Wanneer je zo voor iedere mogelijke stand van de klok de som opschrijft en daarna van al deze getallen het gemiddelde neemt, wat is dan de uitkomst?

Tweede ronde 2010, B3

Antwoord: $\frac{75}{4}$
Uitwerking: Noem het totale aantal mogelijke standen van de klok S (voor deze opgave is het niet nodig S expliciet uit te rekenen). Als we voor iedere mogelijke stand alleen het laatste cijfer van de stand zouden opschrijven, dan zouden we elk van de cijfers $\frac{1}{10}S$ maal opschrijven. De totale som van die laatste cijfers is dus $\frac{1}{10}S\,(0+1+2+\ldots+9)=\frac{45}{10}S=\frac{9}{2}S$.

Als we ditzelfde zouden doen voor het op een na laatste cijfer, dan zouden we alleen de cijfers 0 tot en met 5 opschrijven, elk precies $\frac{1}{6}S$ keer. De totale som van die cijfers is dan $\frac{1}{6}S\,(0+1+\ldots+5)=\frac{15}{6}S=\frac{5}{2}S$.

Op geheel analoge wijze is de som van de cijfers in de minutenposities gelijk aan $\frac{9}{2}S+\frac{5}{2}S$.

Bij de eerste twee cijfers, die de uren aangeven, moeten we beter opletten aangezien niet elk cijfer even vaak voorkomt. Wel geldt dat elk van de cijferparen $00, 01, \ldots, 23$ even vaak voor komt: $\frac{1}{24}S$ keer. De totale som van de eerste twee cijfers is dan gelijk aan

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{24}S\left((0+0)+(0+1)+(0+2)+\ldots+(2+3)\right)\\=&\tfrac{1}{24}S\left((0+1+\ldots+9)+10\cdot 1+(0+1+\ldots+9)+4\cdot 2+(0+1+2+3)\right)\\=&\tfrac{114}{24}S=\tfrac{19}{4}S.\end{aligned}$$

De totale som van alle cijfers van alle mogelijke standen is nu $2\cdot\frac{9}{2}S+2\cdot\frac{5}{2}S+\frac{19}{4}S=\frac{75}{4}S$. Het gemiddelde is het totaal gedeeld door het aantal, S, en dat is dus gelijk aan $\frac{75}{4}$ $(=18\frac{3}{4})$. □

Opgave 10.3.
Twintig leerlingen hebben een toets gemaakt. Geen twee leerlingen hebben hetzelfde aantal vragen goed beantwoord. Elke vraag was door hoogstens drie leerlingen goed beantwoord.
Wat is het kleinste aantal vragen dat de toets kan hebben?

A) 63 B) 64 C) 67 D) 70 E) 71

Eerste ronde 2013, A8

Antwoord: B) 64
Uitwerking: Omdat elk van de twintig leerlingen een ander aantal vragen goed had, werd in totaal minstens $0+1+2+\cdots+19=190$ keer een vraag goed beantwoord. Aangezien elke vraag hoogstens driemaal goed werd beantwoord, waren er minstens $\frac{190}{3}=63\frac{1}{3}$ vragen en dus ook minstens 64.

Een situatie met 64 vragen is ook daadwerkelijk mogelijk. Laat de twintig leerlingen achtereenvolgens 0 tot en met 19 vragen goed hebben. We verdelen de leerlingen in drie groepen:

I bestaat uit de leerlingen met 0, 1, 2, 3, 4, 17, 18 of 19 vragen goed,

II bestaat uit de leerlingen met 5, 6, 7, 14, 15 of 16 vragen goed en

III bestaat uit de leerlingen met 8, 9, 10, 11, 12 of 13 vragen goed.

Voor elk van de drie groepen is het totale aantal juist beantwoorde vragen niet meer dat 64. Voor elke groep kunnen we het dus zó kiezen dat de juist beantwoorde vragen van die leerlingen allemaal verschillend zijn. Zo wordt elke vraag door hoogstens drie leerlingen goed beantwoord. □

Opgave 10.4.
Zowel de rijen als de kolommen van een 8×8-schaakbord zijn genummerd van 1 t/m 8. Op elk veld van het schaakbord wordt een aantal graankorrels gelegd dat gelijk is aan het product van het rijnummer en het kolomnummer.
Hoeveel graankorrels liggen er in totaal op het schaakbord?

Eerste ronde 2008, B1

Antwoord: 1296
Uitwerking: In de eerste kolom komen van boven naar beneden achtereenvolgens te liggen $1\times 1, 1\times 2, 1\times 3, \ldots, 1\times 8$ graankorrels.
In totaal dus in de eerste kolom: $1\times(1+2+3+4+5+6+7+8)$.
In de tweede kolom liggen er: $2\times(1+2+3+4+5+6+7+8)$.
In de derde kolom liggen er: $3\times(1+2+3+4+5+6+7+8)$.
$\vdots$
In de achtste kolom ten slotte: $8\times(1+2+3+4+5+6+7+8)$.
Totaal dus: $(1+2+3+4+5+6+7+8)\times(1+2+3+4+5+6+7+8)$.
Omdat $1+2+3+4+5+6+7+8=\frac{1}{2}\times 8\times(1+8)=36$ in totaal dus $36^2=1296$ graankorrels. □

Opgave 10.5.
Raymond heeft vijf muntjes. Op de kopzijde van elke munt staat het getal 1. Op de muntzijde staan respectievelijk de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{6}$. Omdat elke munt ofwel met kop ofwel met munt boven ligt, zijn er 32 manieren om de vijf muntjes op tafel te leggen. Voor elk van deze 32 manieren vermenigvuldigt Raymond de vijf getallen die boven liggen met elkaar en schrijft hij het resultaat op.
Als Raymond ten slotte deze 32 getallen bij elkaar optelt, wat is dan de uitkomst?

Tweede ronde 2010, B5

Antwoord: $\frac{7}{2}$
Uitwerking: De uitkomsten die Raymond kan krijgen, corresponderen precies met de termen in de uitwerking van het product $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)$.
De totale som is dan natuurlijk

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{2}.$$

□

Pythagorasartikelen

De volgende artikelen zijn verschenen over opgaven in dit boek:

Opgave 1.3: Julian Lyczak (feb. 2009). Negens, negens en nog meer negens. *Pythagoras, 48*(4), p. 24-25.

Opgave 1.7: Sietske Tacoma (feb. 2010). Rode en groene getallen. *Pythagoras, 49*(4), p. 18-19.

Opgave 2.6: Jaap de Jonge (jan. 2014). Op zoek naar 2013. *Pythagoras, 53*(3), p. 28-29.

Opgave 5.6: Julian Lyczak (feb. 2011). Op en neer met de roltrap. *Pythagoras, 50*(4), p. 27-29.

Opgave 5.10: Quintijn Puite (feb. 2013). Blauwe vakjes verdelen, maar wel eerlijk! *Pythagoras, 52*(4), p. 26-28.

Opgave 6.6: Daniël Kroes en Julian Lyczak (juni 2013). De veelzijdigheid van de zeshoek. *Pythagoras, 52*(6), p. 27-29.