NIVEAU ○○○

HUSSELEN EN OPTELLEN MAAR!

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade komt er weer aan: eind januari mogen scholieren uit heel Nederland zich weer buigen over twaalf opgaven. Het leuke van de eerste ronde is dat voor de opgaven weinig wiskundige voorkennis nodig is: met proberen, puzzelen en patronen herkennen kom je al een heel eind.

Door **Siebe Verheijen**

Afgelopen jaar was de opgave in het kader hieronder een van de opgaven van de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade. Dit is behoorlijk veel tekst, dus laten we eerst even kijken wat er precies van ons wordt verwacht. Isaac schrijft een getal op, Dilara doet daar iets mee wat leidt tot een uitkomst en die uitkomst blijkt 1221 te zijn. De vraag is nu eigenlijk: welke getallen kan Isaac hebben opgeschreven zodat de uitkomst 1221 is? Daarna is het niet zo moeilijk om te vinden welk van die getallen dan het grootst is.

> Isaac schrijft een getal van drie cijfers op. Geen enkel van de cijfers is een nul. Isaac geeft zijn blaadje met het getal aan Dilara en zij schrijft onder het getal van Isaac alle driecijferige getallen op die je kunt krijgen door de cijfers van het getal van Isaac in een andere volgorde te zetten. Vervolgens telt zij alle getallen die op het blaadje staan bij elkaar op. De uitkomst is 1221. Wat is het grootste getal dat Isaac kan hebben opgeschreven?

Om te kijken wat Dilara precies doet, vullen we maar eens een getal voor Isaac in, zeg 457: ze schrijft nu alle getallen met drie cijfers op die je kunt krijgen door de cijfers 4, 5 en 7 in een andere volgorde neer te zetten: dat zijn, na wat proberen, 475, 547, 574, 745 en 754. Dilara telt alle getallen bij elkaar op en krijgt 3552, veel meer dan 1221. We proberen nog een getal, 217: nu krijgen we, naast 217 zelf, de getallen 127, 172, 271, 712 en 721, en de som daarvan is 2220, ook meer dan 1221.

>>

457	217	111+	112	123
475	127	111	121	132
547	172		211+	213
574	271		4	231
745	712		40	312
754+	721+		400+	321+
32	20		444	12
320	200			120
3200+	2000+			1200+
3552	2220			1332

Laten we eens een heel klein getal voor Isaac invullen, dan zien we hoe ver we onder de 1221 kunnen komen. Het kleinste driecijferige getal zonder nullen is 111: er zijn geen andere manieren om drie enen in een andere volgorde neer te zetten, dus de som van alle getallen op Dilara's blaadje is ook 111. Dat is wel een beetje flauw. Je kan meteen inzien dat als Isaac een ander getal met drie dezelfde cijfers invult, Dilara's uitkomst altijd Isaacs getal zelf is. De mogelijke uitkomsten zijn dan 111, 222, 333, ... en 999, dus in elk geval geen 1221.

Eigenlijk was 111 dus een apart geval omdat het drie dezelfde cijfers bevatte. Wat als we 112 voor Isaac invullen? Dilara schrijft nu de getallen 121 en 211 op en haar uitkomst wordt 112 + 121 + 211 = 444. Dat is ook veel minder dan 1221. Wat opvalt is dat Dilara hier maar drie getallen optelt, terwijl ze bij het getal 457 juist zes getallen optelde. De oorzaak hiervan is dat 457 drie verschillende cijfers bevat en 112 maar twee verschillende cijfers: hierdoor zijn er minder mogelijkheden om de drie cijfers in een volgorde neer te zetten.

Nog steeds is het interessant om te kijken hoe klein de uitkomst kan worden wanneer Isaacs getal drie verschillende cijfers bevat. Het kleinste getal met drie verschillende cijfers is 123: Dilara schrijft 132, 213, 231, 312 en 321 op en krijgt als uitkomst 1332: nog steeds meer dan 1221.

Wat hierbij opvalt, is dat het niet uitmaakt of Isaac 123 of 132 opschrijft: Dilara telt in beide gevallen alle driecijferige getallen op die te maken zijn met de cijfers 1, 2 en 3. Verder wordt dankzij de kleine gevalletjes een beetje duidelijk hoe Dilara die getallen slim kan optellen. We kijken even terug naar het voorbeeld 457: we tellen de zes getallen per kolom op: de som van de eenheden is 32, de som van de tientallen is 320 en de som van de honderdtallen is 3200: telkens 32 met het desbetreffend aantal nullen erachter. Dit komt doordat we telkens dezelfde cijfers (in dit geval 4, 4, 5, 5, 7, 7) bij elkaar optellen. Dilara's uitkomst is nu eigenlijk 100 + 10 + 1 = 111 keer de som van die zes cijfers. In die som van zes cijfers komt elk cijfer van Isaacs getal precies twee keer voor. Hierdoor is Dilara's uitkomst dus 111 x 2 x (som cijfers) = 222 x (som cijfers).

Zo zien we dat Dilara's uitkomst 222 keer de som van de cijfers van Isaacs getal is, althans, als zijn getal uit drie verschillende cijfers bestaat. De kleinste som van drie verschillende cijfers (ongelijk aan 0) is 1 + 2 + 3 = 6, dus de kleinst mogelijke uitkomst is dan 222 x 6 = 1332 en dat is meer dan 1221.

We zien dat Isaacs getal dus niet uit drie verschillende cijfers kan bestaan. We hadden eerder al gezien dat het ook niet uit drie dezelfde cijfers kan bestaan. Zijn getal bevat dus twee verschillende cijfers. We zouden nu eigenlijk net zo'n slimme manier van optellen willen als hierboven. Net was het handig om de som per kolom te bekijken, dus laten we dat nu maar weer doen. We spieken even in het voorbeeld met 112. De som is nu in elke kolom 1 + 1 + 2 = 4. Dit zijn precies de cijfers van Isaacs getal. Dilara's uitkomst werd nu (100+10+1) x (1+1+2) = 444. Wanneer we een ander getal voor Isaac kiezen, komt op de plaats van (1+1+2) nu de som van de cijfers van Isaacs getal. Dilara's uitkomst wordt dus (100+10+1) x (som cijfers) = 111 x (som cijfers).

We zochten naar getallen voor Isaac zodat Dilara's uitkomst 1221 was, dus 111 x (som cijfers) = 1221. Gelukkig blijkt dat 1221 = 111 x 11, dus de som van de cijfers moet blijkbaar 11 zijn. We zoeken nu dus naar het grootste getal met drie cijfers, waarvan de som 11 is en waarvan er precies twee cijfers hetzelfde zijn. Van alle driecijferige getallen, zijn de getallen die met een 9 beginnen het grootst, dus laten we daar maar beginnen met zoeken. De som van de overige twee cijfers wordt dan 11 – 9 = 2, dus de twee andere cijfers moeten wel 1 en 1 zijn. Dit levert meteen het getal 911 op.

Even controleren: als Isaac 911 opschrijft, schrijft Dilara ook nog 119 en 191 op en de som van deze drie getallen is inderdaad 1221. Van elk ander driecijferig getal groter dan 911 (en zonder nullen) is de som van de cijfers minstens 9 + 1 + 2 (of 9 + 2 + 1), dus minstens 12, dus die vallen inderdaad allemaal af. We zien dat 911 het grootste getal is wat Isaac kan hebben opgeschreven en daarmee is de opgave opgelost.

Achteraf heeft het bij deze opgave enorm geholpen om gewoon twee getallen voor Isaac te kiezen en te kijken of er dingen in deze probeersels opvallen. Meestal vallen er patronen te herkennen (bij deze opgave bijvoorbeeld die 32, 320 en 3200 en het verband met de som van de cijfers) die een stap zijn richting de oplossing. Wellicht komt deze strategie waarbij je simpelweg wat invult, ook wel van pas bij de komende eerste ronde van de Wiskunde Olympiade!

<<

KLEINTJE

VERRASSENDE FORMULE

De kromming van een bol is het omgekeerde van de straal. Vier bollen met krommingen a, b, c en d rusten op een vlak. Elke bol raakt de drie andere. Dan geldt:

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$$