Matthijs van der Poel

Munten draaien

Afgelopen zomer vond de 60e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats in Bath, Engeland. Ruim 600 middelbare scholieren uit meer dan 100 landen zijn daar met elkaar de strijd aangegaan. Nederlands teamlid Matthijs van der Poel bespreekt in dit artikel opgave 5.

Het Nederlandse IMO-team, v.l.n.r. Jovan, Jippe, Szabi, Jesse, Richard en Matthijs

De weg naar de IMO

De IMO is geen wedstrijd waar je zomaar aan mee kunt doen. De eerste selectieronde, de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, vindt al meer dan een jaar voor de bijbehorende IMO plaats. Van de ongeveer 10.000 leerlingen die meedoen aan de eerste ronde kunnen er uiteindelijk maar zes deel uitmaken van het Nederlandse team. Nadat ik in de eerste klas voor het eerst had meegedaan aan de eerste ronde was ik verrast toen ik hoorde dat ik uitgenodigd was voor de tweede ronde en de finale, en dat ik uiteindelijk vijfde werd van mijn categorie. Door deze prestatie kon ik met zo'n dertig andere leerlingen deelnemen aan de training voor de IMO. Dat houdt in: maandelijks een bijeenkomst van een dag, een weekend, of zelfs een week waarvan elke dag gevuld is met tien tot elf uur wiskunde. Buiten deze bijeenkomsten hoef je je ook niet te vervelen: elke week kun je opgaven maken en opsturen. In 2017 lukte het mij om via in totaal zeven toetsen geselecteerd te worden om mee te gaan naar de IMO, en dit jaar was ik niet minder blij dat ik weer voor het Nederlandse team was geselecteerd. Ik vond opgave 5, de tweede opgave van de tweede wedstrijddag, het aangenaamst om aan te werken. Aan deze opgave wil ik dan ook dit artikel besteden.

Opgave 5

Harry heeft n munten van links naar rechts op een rij gelegd. Elke munt ligt met kop (K) of met munt (M) boven. Hij voert herhaaldelijk de volgende handeling uit: als er precies $k \geq 1$ munten zijn die met de K naar boven liggen, dan draait hij de k-de munt van links gezien om; als alle munten met de M naar boven liggen, dan stopt hij.

Een voorbeeld: als $n = 3$ en Harry start met de beginrij MKM, dan krijgt hij achtereenvolgens MKM $\to$ KKM $\to$ KMM $\to$ MMM en stopt hij na drie handelingen.

(a) Bewijs dat Harry voor elke beginrij na een eindig aantal handelingen stopt.

(b) Voor elke beginrij C definiëren we $L(C)$ als het aantal handelingen totdat Harry stopt. Bijvoorbeeld: $L(\text{MKM}) = 3$ en $L(\text{MMM}) = 0$. Bepaal de gemiddelde waarde van $L(C)$ over alle 2^n mogelijke beginrijen C.

Kleine gevalletjes

We beginnen met vraag a te proberen op te lossen. We gaan waarschijnlijk niet een oplossing uit het niets bedenken; we hebben namelijk nog helemaal geen gevoel voor de opgave. Om dat gevoel wel te krijgen is het handig om wat beginrijtjes te proberen en te zien wat er dan gebeurt. Laten we beginnen bij het begin, dus met zo kort mogelijke beginrijtjes. Dat zijn de twee rijen K en M. Als Harry start met de beginrij K, dan krijgt hij achtereenvolgens K $\to$ M en vervolgens stopt hij. Bij de beginrij M stopt Harry direct. Aan deze twee gevalletjes kunnen we nog niet zo veel zien, dus we gaan door met het proberen van beginrijtjes met lengte 2. Dat zijn de vier rijen KK, MK, KM, en MM. Bij KK krijgt Harry achtereenvolgens KK → KM → MM. Bij MK krijgt Harry MK → KK → KM → MM. Bij KM krijgt Harry KM → MM. En bij MM stopt Harry meteen. We kunnen nu nog steeds niet veel opmerken, behalve dat het inderdaad elke keer na een eindig aantal handelingen stopt, dus we gaan op dezelfde manier verder met $n = 3$. We gaan alle acht mogelijke rijtjes één voor één uitproberen. Voor het gemak zetten we een streep onder de munt die we gaan omdraaien:

$\mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$

$\mathrm{M\underline{K}K} \to \mathrm{\underline{M}MK} \to \mathrm{K\underline{M}K} \to \mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$

$\mathrm{K\underline{M}K} \to \mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$

$\mathrm{\underline{M}MK} \to \mathrm{K\underline{M}K} \to \mathrm{KK\underline{K}} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$

$\mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$

$\mathrm{\underline{M}KM} \to \mathrm{K\underline{K}M} \to \mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$

$\mathrm{\underline{K}MM} \to \mathrm{MMM}$

MMM

Er valt nog niet iets direct op, maar we hebben nu wel meer gevoel voor hoe de rijtjes zich gedragen.

Uit het ongerijmde

Laten we opnieuw kijken naar wat we moeten bewijzen. We moeten voor elke beginrij laten zien dat Harry na een eindig aantal handelingen stopt. We kunnen proberen om dit te bewijzen uit het ongerijmde. Dat wil zeggen: we nemen eerst aan dat het gevraagde onwaar is, en vervolgens proberen we daar een tegenspraak uit af te leiden (waaruit we kunnen concluderen dat het gevraagde tóch waar was). In ons geval nemen we dus eerst aan dat er wél een beginrij A is waarop Harry oneindig vaak een handeling doet, en proberen we vervolgens te bewijzen dat zo'n rij niet kan bestaan. Wat zou er namelijk gebeuren als die beginrij A bestaat? Als eerste kunnen we opmerken dat er dan minstens één munt a is die oneindig vaak wordt omgedraaid door Harry. In het bijzonder wordt die munt a ook oneindig vaak omgedraaid zodat die na de omdraaiing met de K boven komt te liggen. We hebben net tijdens het bekijken van de kleine gevalletjes dit gezien: Als Harry tijdens handeling nummer b een munt c omdraait zodat die met K boven komt te liggen, draait Harry tijdens handeling nummer $b + 1$ de munt direct rechts van munt c om. Dat is logisch, want tijdens het doen van handeling $b + 1$ telt Harry precies één K meer dan tijdens het doen van handeling b. Daaruit kunnen we concluderen dat de munt direct rechts van munt a ook oneindig vaak wordt omgedraaid. Kunnen we dan ook laten zien dat de munt direct links van munt a oneindig vaak wordt omgedraaid? Ja! Want die munt wordt juist elke keer omgedraaid nadat munt a wordt omgedraaid zodat die met de M boven komt te liggen. In het algemeen kunnen we dus het volgende concluderen: als een munt oneindig vaak wordt omgedraaid, worden de twee munten naast die munt ook oneindig vaak omgedraaid. We hadden al opgemerkt dat er minstens één munt is die oneindig vaak wordt omgedraaid, dus alle munten worden oneindig vaak omgedraaid. Kunnen we met deze informatie snel op een tegenspraak uitkomen? Ja: want dit betekent dat de meest linker munt ook oneindig vaak wordt omgedraaid. In het bijzonder draait Harry die munt een keer om zodat die met de M boven komt te liggen. Maar nadat Harry dat heeft gedaan, telt Harry nul K's (want vlak voor die handeling moet hij er precies één geteld hebben). En dan eindigt het spel. Maar we hadden juist aangenomen dat Harry oneindig vaak een handeling doet, dus we hebben inderdaad een tegenspraak gevonden. We concluderen dat het gevraagde bij (a) waar is.

Een vermoeden

Ook bij onderdeel (b) is het handig om naar kleine gevalletjes te kijken, zodat we een vermoeden kunnen krijgen over hoe we de opgave uiteindelijk op willen lossen. Misschien kunnen we zelfs een patroon herkennen in de gemiddelde waarde van $L(C)$ bij verschillende waarden voor n. Laten we kijken naar de gemiddelde waarde voor $L(C)$ bij $n = 1$, bij $n = 2$ en bij $n = 3$. Voor het gemak noteren we G_n voor de gemiddelde waarde van $L(C)$ over alle beginrijtjes C met lengte n. Hiervoor kunnen we terugkijken op wat we bij onderdeel (a) hebben gezien. We beginnen met het geval $n = 1$. We zien dat $L(\mathrm{K}) = 1$ en $L(\mathrm{M}) = 0$, dus $G_1 = (1 + 0)/2 = 0{,}5$. We gaan verder met het geval $n = 2$. We zien dat $L(\mathrm{KK}) = 2$, $L(\mathrm{MK}) = 3$, $L(\mathrm{KM}) = 1$ en $L(\mathrm{MM}) = 0$, dus $G_2 = (2 + 3 + 1 + 0)/4 = 1{,}5$. Ten slotte bekijken we het geval $n = 3$. We zien dat $L(\mathrm{KKK}) = 3$, $L(\mathrm{MKK}) = 6$, $L(\mathrm{KMK}) = 4$, $L(\mathrm{MMK}) = 5$, $L(\mathrm{KKM}) = 2$, $L(\mathrm{MKM}) = 3$, $L(\mathrm{KMM}) = 1$ en $L(\mathrm{MMM}) = 0$. Daaruit volgt dat $G_3 = (3 + 6 + 4 + 5 + 2 + 3 + 1 + 0)/8 = 24/8 = 3$. De oplettende rijtjeskenner valt het nu op dat G_1 de helft van het eerste driehoeksgetal is, G_2 de helft van de tweede en G_3 de helft van de derde. Dat kan toeval zijn, maar wie gaat kijken of het ook zo werkt bij grotere n ziet dat dit patroon zich inderdaad voortzet. Misschien kan dit vermoeden ons helpen bij het vinden van de oplossing, en anders kunnen we dit vermoeden inzetten als we een bepaalde berekening willen controleren.

Een verband

Als we nog even goed naar onze kleine gevalletjes kijken, valt ons iets op: de laatste vier waarden van $L(C)$ bij $n = 3$ zijn precies de waarden bij $n = 2$ (namelijk in deze volgorde 2, 3, 1 en 0). Zou dat in het algemeen ook waar zijn? We zien inderdaad dat de laatste twee waarden in het geval $n = 2$ hetzelfde zijn als de waarden bij $n = 1$, namelijk in deze volgorde 1 en 0. Voor de zekerheid controleren we ook of de laatste acht waarden bij het geval $n = 4$ dezelfde waarden zijn als de acht waarden van het geval $n = 3$, en het blijkt inderdaad te kloppen! Zou er dan een verband zijn tussen de beginrijtjes KK, MK, KM, en MM, en de beginrijtjes KKM, MKM, KMM, en MMM? Ja, het verschil is dat er een munt met >

de M boven aan de rechterkant van de rij is toegevoegd of weggehaald. Nu weten we ook waarom de waarden hetzelfde zijn, want een munt met de M boven aan de rechterkant meer of minder verandert niets aan de handelingen die Harry doet.

De andere helft

Zou er dan ook een verband zijn tussen de andere vier waarden $L(C)$ bij $n = 3$ en de vier waarden van $L(C)$ bij $n = 2$? Die blijkt er te zijn: de waarden 3, 6, 4 en 5 zijn precies 3 hoger dan de waarden 2, 3, 1 en 0 (maar dit keer niet in deze volgorde). Een stap lager zien we eveneens dat 2 en 3 precies 2 hoger zijn dan 1 en 0. En als we het geval $n = 4$ bekijken, zien we dat dit vermoeden nog steeds op gaat. Maar wat is dan precies het verband tussen de beginrijen KKK en MM, tussen MKK en MK, tussen KMK en KM, en tussen MMK en KK? Dit blijkt geen eenvoudig verband te zijn; zelf had ik dit verband tijdens de wedstrijd ook niet gezien. Maar door hard door te werken (bijvoorbeeld door te kijken naar grotere n), en door gebruik te maken van hun wiskundige intuïtie die zij in de afgelopen jaren hebben opgebouwd, hadden vier van mijn teamgenoten dit wel gezien. Het idee is om eerst de meest rechter munt te verwijderen, daarna alle munten om te draaien (dus K wordt M en M wordt K) en ten slotte de rij te spiegelen. Op deze manier verandert bijvoorbeeld de beginrij KMKKK in de beginrij MMKM. Dat inderdaad de vergelijking $L(\text{KMKKK}) = L(\text{MMKM}) + 5$ waar is, illustreren we door al Harry's handelingen uit te schrijven:

K	M	K	$\underline{\text{K}}$	K			$\underline{\text{M}}$	M	K	M
K	M	$\underline{\text{K}}$	M	K			K	$\underline{\text{M}}$	K	M
K	$\underline{\text{M}}$	M	M	K			K	K	$\underline{\text{K}}$	M
K	K	$\underline{\text{M}}$	M	K			K	$\underline{\text{K}}$	M	M
K	K	K	$\underline{\text{M}}$	K			$\underline{\text{K}}$	M	M	M
K	K	K	K	$\underline{\text{K}}$			M	M	M	M
K	K	K	$\underline{\text{K}}$	M						
K	K	$\underline{\text{K}}$	M	M						
K	$\underline{\text{K}}$	M	M	M						
$\underline{\text{K}}$	M	M	M	M						
M	M	M	M	M						

We zien dat de twee dik omkaderde blokken spiegelbeelden van elkaar zijn, zowel in de zin dat de K's in M's veranderd zijn en de M's in K's, als in de zin dat de rijen gespiegeld zijn.

Conclusie

We hebben nu twee keer een verband gevonden tussen G_n en G_{n-1}. Kunnen we nu een formule geven die G_n uitdrukt in termen van G_{n-1}? Laten we eerst kijken of we G_3 uit kunnen drukken in termen van G_2, want als dat ons niet lukt, dan gaat het algemene geval ook niet lukken. We zagen dat voor de helft van de waarden $L(C)$ in het geval $n = 3$ geldt dat die één op één te verbinden zijn aan de waarden $L(C)$ in het geval $n = 2$.
Voor de andere helft van de waarden $L(C)$ in het geval $n = 3$ zagen we dat die gemiddeld 3 méér waren dan de waarden $L(C)$ in het geval $n = 2$. Dus G_3 is het gemiddelde van G_2 en $G_2 + 3$. Dus $G_3 = 1\tfrac{1}{2} + G_2$. Dat komt gelukkig overeen met de waarden voor G_2 en G_3 die we uitgerekend hadden. In het algemeen krijgen we op deze manier de recursieve uitdrukking $G_n = n/2 + G_{n-1}$. Kunnen we dan ook een directe formule krijgen voor G_n? We weten ook dat $G_{n-1} = (n-1)/2 + G_{n-2}$ en dat $G_{n-2} = (n-2)/2 + G_{n-3}$, tot en met $G_2 = G_1 + 1 = 1 + \tfrac{1}{2}$. Daaruit concluderen we dat $G_n = n/2 + G_{n-1} = n/2 + (n-1)/2 + G_{n-2} =$
$n/2 + (n-1)/2 + (n-2)/2 + G_{n-3} = \ldots =$
$n/2 + (n-1)/2 + (n-2)/2 + \ldots + 2/2 + 1/2$.
Maar dat is de helft van de som van de getallen van 1 tot en met n. Dus $G_n = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{4}n(n+1)$. Dit is precies wat we wilden laten zien, dus hiermee is deel (b) bewezen. Sterker nog: dit is ook meteen een bewijs voor onderdeel (a), want als alle G_n eindig zijn, dan is $L(C)$ voor elke rij C ook eindig.

Toegankelijk, toch moeilijk

Dit is een fijne opgave om aan te werken. Zelfs als je geen idee hebt over hoe je de opgave moet oplossen, kun je altijd nog een nieuw beginrijtje nemen en kijken wat Harry dan gaat doen. Iedereen met voldoende doorzettingsvermogen zou tot een oplossing kunnen komen, want de opgave vereist geen kennis van ingewikkelde stellingen of technieken. Dit betekent niet dat de oplossing makkelijk is om te vinden. Er zijn genoeg manieren om de opgave aan te pakken zonder dat dat leidt tot een oplossing. De opgave is dus toegankelijk, maar toch moeilijk. Precies het type opgaven dat je zou willen op de IMO. Door de jarenlange en intensieve training wisten wij, als Nederlands team, gezamenlijk 37 van de 42 punten op deze opgave binnen te halen. Slechts 18 teams lukte het om een hogere totaalscore te halen voor opgave 5. Uiteindelijk konden we naar huis gaan met een eervolle vermelding (deze behaal je door een opgave foutloos op te lossen), vier bronzen medailles, en een zilveren medaille, maar vooral met leuke herinneringen aan twee weken wiskunde en het ontmoeten van deelnemers uit andere culturen.

vakbladeuclices.nl/954poel

Het verband onder het kopje 'De andere helft' had ik niet gezien, maar ik had wel een ander resultaat gevonden dat ik kon gebruiken. Deze variant is te vinden op de website van *Euclides.*

Over de auteur

Matthijs van der Poel zat op het Oosterlicht College Nieuwegein en het Christelijk Gymnasium Utrecht tijdens de vijf jaar waarin hij deelnam aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade.
Dit was zijn derde IMO, en ook zijn derde zilveren medaille. Nu studeert hij wiskunde aan de Universiteit van Cambridge