Hylke Hoogeveen

Kaartjes en kwadraten

Afgelopen zomer zou de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaatsvinden in Sint-Petersburg. Vanwege de coronapandemie konden de deelnemers niet naar Rusland afreizen en hebben ze de olympiade in hun eigen land als wedstrijd-op-afstand gemaakt. Hylke Hoogeveen won een bronzen medaille en bespreekt een van de opgaven.

Afgelopen juli heb ik samen met vijf anderen meegedaan aan de IMO. Het Nederlandse team zat in Egmond aan Zee, een minder spectaculaire locatie dan Sint-Petersburg maar niet minder leuk. Om aan de IMO mee te kunnen doen hebben we allemaal veel getraind in de trainingsgroep van de wiskundeolympiade. Daarom was iedereen heel blij dat we ons door alle wedstrijden hadden heengeslagen en (allemaal voor de eerste keer) mee mochten doen aan de IMO. Dit was al mijn derde jaar in de trainingsgroep. Ik was als vijfde geëindigd bij de selectiewedstrijden, waardoor het nog even spannend was. Ik was dan ook blij verrast dat ik een bronzen medaille had gewonnen bij de IMO, wat betekende dat ik bij de beste helft zat van alle deelnemers over de hele wereld.
Opgave 1 luidde als volgt:

IMO 2021 — 62nd International Mathematical Olympiad Saint-Petersburg Russia

Opgave 1. Zij $n \geq 100$ een geheel getal. Kira schrijft de getallen $n, n+1, \ldots, 2n$ op kaarten, ieder getal op een andere kaart. Zij schudt deze $n+1$ kaarten en verdeelt ze over twee stapels.

Bewijs dat ten minste één van de stapels twee kaarten bevat zodanig dat de som van hun getallen een (perfect) kwadraat (van een geheel getal) is.

Hoe te beginnen

Je moet natuurlijk op een manier aan deze opgave beginnen. Voordat je de opgave kunt oplossen moet je eerst een gevoel krijgen van wat er aan de hand is. Het mantra van de wiskundeolympiade is om te beginnen met kleine gevallen, kleine waarden invullen, zodat je iets concreets hebt wat je simpel kunt oplossen waardoor je ideeën krijgt voor het algemene geval. Bij deze opgave gaat dat echter niet, omdat de enige variabele n groter dan of gelijk aan honderd moet zijn. Bij veel kleinere waarden van n klopt de opgave niet, waardoor je daar niks aan hebt. Hierdoor kun je je kleine gevallen niet gebruiken om ideeën te krijgen, want het geval $n = 100$ is veel te moeilijk. Bij deze opgave is het precies andersom: je moet eerst slimme ideeën voor het algemene geval bedenken, die je dan kunt checken bij het geval $n = 100$.
Ik was daarom zelf aan deze opgave begonnen met wat algemene observaties, door bijvoorbeeld te bedenken wat ik wist van kwadraten in combinatie met dingen optellen. Dit gaf mij echter nog geen ideeën waarmee ik direct veel verder kwam. Daarom gebruikte ik een andere handige strategie van de wiskundeolympiade: terugwerken. Hierbij begin je met het gevraagde en kijk je op welke manieren je dat zou kunnen bewijzen. Soms kom je er dan op uit dat iets anders al genoeg is om te bewijzen, wat een stuk makkelijker of fijner is. Bij deze opgave is het genoeg om te bewijzen dat er drie kaarten zijn waarvan elk tweetal samen een kwadraat is. Omdat er logischerwijs altijd twee van deze kaarten in dezelfde stapel moeten zitten, volgt daaruit het gevraagde. Dit idee maakt de opgave een stuk makkelijker en duidelijker, want we kunnen nu het hele verhaal met de stapels en de kaarten weglaten. Het lijkt dus een goed idee om dit te proberen te bewijzen, alhoewel we nog niet zeker weten of het klopt.
We beginnen met een definitie: we noemen een drietal van gehele getallen (x, y, z) *kwadratisch* als voor zekere gehele getallen c, d en e geldt dat $x + y = c^2$, $y + z = d^2$ en $z + x = e^2$. Het is nu dus voldoende om te bewijzen dat er altijd een kwadratisch drietal bestaat uit de getallen n tot en met $2n$. Dit is een stuk concreter dan de oorspronkelijke opgave en het is dus een stuk duidelijker waar we naartoe willen werken. Het lijkt dat we op het goede spoor zitten.

Even een stap terug

Meestal is het handig om bij een idee eerst even een stap terug te zetten voordat je eraan gaat werken. Het helpt >

vaak om vermoedens en ideeën eerst te testen in kleine gevallen. Je kunt dan checken of je vermoeden echt klopt en je krijgt dan goed door wat er precies gebeurt bij je idee. Alhoewel $n = 100$ niet echt klein is, is het toch de moeite waard om dit idee te testen. Omdat dit al een erg groot en ingewikkeld geval is, moeten we wel iets slims gaan bedenken om de kwadratische drietallen te vinden of ze te kunnen uitsluiten. Op zo'n moment is het dan ook handig om terug te kijken wat je nog meer weet van de opgave. Omdat je vrijwel nooit direct met het juiste idee begint, zijn er meestal wel andere nuttige dingen die je eerder hebt ontdekt. Ik had bijvoorbeeld eerder al bedacht dat het eigenlijk vooral gaat om de kwadraten tussen $2n$ en $4n$, want dat zijn alle kwadraten die gemaakt kunnen worden door de getallen van twee verschillende kaarten bij elkaar op te tellen. Daarnaast is het logisch dat hoe kleiner n is, hoe minder kwadraten er tussen $2n$ en $4n$ zijn. Voor kleine gevallen van n (bijvoorbeeld $n = 100$) hebben we dus maar een beperkt aantal kwadraten voor onze kwadratische drietallen. Dit zien we inderdaad terug bij $n = 100$, want dan zitten er maar vijf kwadraten tussen $2n$ en $4n$ (en $4n$ zelf is 20 in het kwadraat).

We weten dat er voor ons idee van de kwadratische drietallen drie kwadraten nodig zijn, namelijk c^2, d^2 en e^2, en dat een kwadratisch drietal wordt vastgelegd door die drie kwadraten. Aangezien we bij $n = 100$ maar beperkte mogelijkheden hebben voor de drie kwadraten hoeven we dus alleen nog maar de mogelijke combinaties langs te gaan. Als we bijvoorbeeld de kwadraten van 15, 16 en 18 bekijken, dan krijgen we $x + y = 225$, $y + z = 256$ en $z + x = 324$. Door de eerste en de derde vergelijking van elkaar af te trekken, vinden we dan dat y en z een verschil van 99 en een som van 256 hebben, dus ze moeten 78,5 en 177,5 zijn. Dit kwadratische drietal gaat dus niet werken. Door elke keer op deze manier y (de kleinste) en z (de grootste) te bepalen vinden we met een beetje rekenwerk dat de drie kwadraten 289, 324 en 361 worden gemaakt door het enige kwadratische drietal 163, 126 en 198. Dit kwadratische drietal voldoet natuurlijk ook voor alle n tot en met 126. Nu we zien dat ons idee klopt voor $100 \leq n \leq 126$ en we ook al het een en ander hebben gevonden van wat er gebeurt bij deze kwadratische drietallen, kunnen we kijken of we het idee van de kwadratische drietallen ook in het algemeen kunnen bewijzen.

Het kleine geval veralgemeniseren

Als je in het algemeen wilt bewijzen dat iets (bijvoorbeeld een kwadratisch drietal) altijd bestaat dan moet je daar meestal een constructie voor geven. Je geeft dus een manier waarop je een drietal kunt maken en vervolgens laat je zien dat het drietal kwadratisch is en binnen de grenzen n tot $2n$ zit. We willen dus de drie getallen x, y en z op een of andere manier definiëren. We kunnen nu gebruikmaken van wat we bij ons kleine geval hebben gedaan. We weten daardoor namelijk dat het fijn werkt om de drie kwadraten te geven die het kwadratische drietal maken. We moeten nu wel onze kwadraten handig kiezen, zodat we er een kwadratisch drietal binnen de grenzen uit krijgen. Hiervoor hebben we bij het nagaan van de combinaties voor $n = 100$ al het een en ander ontdekt:

1. Kwadraten dicht bij de grenzen $2n$ en $4n$ lijken niet te werken omdat de getallen van het kwadratisch drietal dan snel te klein of te groot zijn.
2. De verschillen van de kwadraten zijn gelijk aan de verschillen van het kwadratisch drietal.
3. De som van de drie kwadraten moet even zijn.

We kunnen de tweede en derde regel makkelijk in het algemeen bewijzen uit de vergelijkingen $x + y = c^2$, $y + z = d^2$ en $z + x = e^2$. De tweede regel krijgen we door twee vergelijkingen van elkaar af te trekken. Als we alle drie de vergelijkingen bij elkaar optellen, dan krijgen we dat de som van de drie kwadraten gelijk is aan twee keer de som van het kwadratisch drietal. Daarom moet de som van de kwadraten altijd even zijn.

We willen nu drie kwadraten nemen waaruit een kwadratisch drietal komt waarvan de getallen tussen n en $2n$ liggen. Vanwege de eerste regel willen we dan dus kwadraten nemen die ongeveer in het midden tussen $2n$ en $4n$ liggen. Hier kunnen we nu niet direct iets mee, maar het is wel handig om dit in ons achterhoofd te houden, want misschien moeten we hier iets mee bij het bewijzen van de grenzen. Als de getallen van het kwadratische drietal grote verschillen hebben, dan hebben ze een grotere kans om niet aan de grenzen voldoen. We willen dus vanwege de tweede regel ook dat de drie kwadraten zo klein mogelijke verschillen hebben, het liefst dat het drie opeenvolgende kwadraten zijn. Er geldt dan vanwege de derde regel dat de middelste van de drie kwadraten even moet zijn. We kunnen dit concreet zeggen als dat we de kwadraten van de getallen $2a - 1$, $2a$ en $2a + 1$ kiezen. We denken dat we hiermee altijd een kwadratisch drietal kunnen vinden en willen verdergaan met deze getallen, omdat we dan een stuk concreter kunnen werken. We zoeken nu dus een drietal x, y, z zodat $x + y = (2a - 1)^2$, $y + z = (2a)^2$ en $z + x = (2a + 1)^2$. Hieruit krijgen we op dezelfde manier als bij het kleine geval het kwadratisch drietal $x = 2a^2 + 1$, $y = 2a^2 - 4a$ en $z = 2a^2 + 4a$.

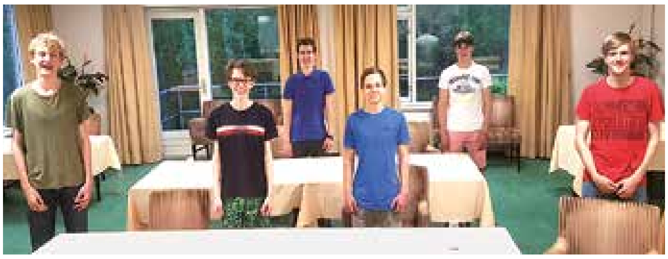
Door hierin $a = 9$ in te vullen krijgen we precies ons kwadratisch drietal voor het geval $n = 100$, dus het lijkt dat we op de goede weg zitten.

De grenzen checken

We moeten nu alleen nog op een of ander manier laten zien dat we a altijd zo kunnen kiezen dat de drie getallen van ons kwadratische drietal tussen n en $2n$ zitten. Dit betekent dat we moeten bewijzen dat er voor elke n een a bestaat zodat $n \leq 2a^2 - 4a$ en $2n \geq 2a^2 + 4a$. We waren bezig met de kwadraten tussen $2n$ en $4n$ en dus is het het fijnst als we dit ook daarmee kunnen bewijzen, in plaats van dat we weer wat nieuws moeten bedenken. Het lijkt dus handig om de ongelijkheden maal 2 te doen, want dan krijgen we ook weer precies die grenzen terug. We krijgen dan dat we moeten bewijzen dat er een a is zodat $2n \leq 4a^2 - 8a = (2a - 2)^2 - 4$ en $4n \geq 4a^2 + 8a = (2a + 2)^2 - 4$. We zien nu dus dat we moeten bewijzen dat de kwadraten van $2a - 2$, $2a - 1$, $2a$, $2a + 1$ en $2a + 2$ allemaal tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ liggen. Hierin zien we weer terug dat de kwadraten van $2a - 1$, $2a$ en $2a + 1$ dus in het midden moeten zitten. We hoeven dus a alleen maar zo te kiezen dat $4a^2$ een van de middelste kwadraten tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ is, maar hiervoor moeten we wel bewijzen dat zo'n $4a^2$ bestaat. Dit volgt als we kunnen bewijzen dat er altijd zes kwadraten tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ liggen, want dan kunnen we van de middelste twee gewoon degene die even is als $4a^2$ kiezen. Door weer even terug te gaan naar onze kleine gevallen zien we dat er bij $n = 98$ geen zes van zulke kwadraten zijn. Ons kwadratisch drietal van het kleine geval werkt ook precies bij $n = 98$ niet meer, dus dit lijkt inderdaad te kloppen met wat we hebben en met de opgave. Het bewijs blijkt dan ook niet zo moeilijk te zijn: Door een bewijs uit het ongerijmde (het tegenovergestelde aannemen en dan laten zien dat dat niet kan) te gebruiken kun je aannemen dat er een b is zodat $b^2 < 2n + 4$ en $(b + 6)^2 > 4n + 4$. Door het verschil van deze twee ongelijkheden te nemen, geldt dan dat $12b + 36 > 2n$. Anderzijds geldt voor $b \geq 15$ dat $b^2 - 12b = (b - 12)b \geq 3b > 40$, zodat $12b + 40 < b^2$. Dus dan is $12b + 36$ kleiner dan $b^2 - 4$, wat weer kleiner is dan $2n$, wat tot een tegenspraak leidt. Als 15^2 dus niet tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ zit, dan volgt het gevraagde. We hoeven nu dus alleen nog de n kleiner dan 111 af te gaan. Gelukkig hadden we al deze waarden van n al opgelost in ons kleine geval dus is het bewijs compleet.

Conclusie

Bij deze opgave bleek uiteindelijk het bedenken van het eerste idee om te kijken naar kwadratische drietallen het moeilijkst. Zonder dit idee was de opgave namelijk niet op te lossen. Ook bleken kleine gevallen erg nuttig te zijn, ook al kon je er in het begin niks mee. Het oplossen van het geval $n = 100$ gaf al een goed idee voor de oplossing en het bleek dan ook al twee van de zeven punten waard te zijn. Ik had dit zelf niet gedaan, waardoor ik het een stuk moeilijker had om het tweede deel van het bewijs te bedenken. Gelukkig heb ik wel de maximale score van 7 punten weten te halen. Ook was het bij deze opgave erg belangrijk om zorgvuldig te werken. Er zat namelijk veel rekenwerk in de opgave, wat meestal erg foutgevoelig is. Op de wedstrijd moesten we alles ook nog netjes opschrijven en bij een rekenfout klopte het bewijs niet helemaal, wat een punt aftrek was. Helaas is dit twee mensen van ons team overkomen. Uiteindelijk hadden vier van ons deze opgave opgelost, waardoor we in totaal als team 29 punten voor deze pittige opgave hebben gehaald.



Het Nederlandse Olympiadeteam. Van links naar rechts: Hylke Hoogeveen, Casper Madlener, Kevin van Dijk, Jelle Bloemendaal, Kees den Tex en Thian Tromp

Over de auteur

Hylke Hoogeveen zit in de vijfde klas van het Openbaar Lyceum Zeist. Hij zit sinds de tweede klas in de trainingsgroep van de wiskundeolympiade. Dit was zijn eerste deelname aan de IMO; hij kan de komende twee jaar nogmaals meedoen.
E-mailadres: *hylkehoogeveen117@gmail.com*