EEN KONINKLIJK BORDSPEL IN TRANSSYLVANIË

Nils van de Berg

De 59e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) keerde afgelopen zomer terug naar het land waar de eerste IMO werd gehouden: Roemenië. In Cluj-Napoca, de hoofdstad van de historische regio Transsylvanië, mochten de leerlingen zich aan zes opgaven wagen. In dit artikel bespreekt deelnemer Nils van de Berg zijn oplossing van opgave 4.

Het Nederlandse team is het afgelopen jaar geselecteerd aan de hand van allerlei verschillende toetsen. Vorig jaar ben ik ook mee geweest naar de IMO en door mijn leuke tijd toen was ik des te gemotiveerder om dit jaar weer mee te gaan. Bij elke selectietoets was het weer even peentjes zweten, maar na de laatste toets stond ik nog overeind en mocht ik met zes andere leerlingen naar Roemenië. Aan de andere kant van Europa hebben we eerst een week hard met elkaar getraind voordat we de deelnemers van meer dan honderd andere landen ontmoetten. De eerste opgave van dag twee was deze opgave waarin de oud-staatshoofden van België en Nederland een rol speelden.

Opgave 4

Een *plek* is een punt (x, y) in het vlak zodat x en y beide gehele getallen zijn met $1 \leq x, y \leq 20$. Bij aanvang zijn alle 400 plekken leeg. Albert en Beatrix plaatsen om de beurt een steen, waarbij Albert begint. Als Albert aan de beurt is, plaatst hij een nieuwe rode steen op een lege plek, zodanig dat de afstand tussen elke twee plekken met een rode steen niet gelijk is aan $\sqrt{5}$. Als Beatrix aan de beurt is, plaatst zij een nieuwe blauwe steen op een lege plek. (Een plek met een blauwe steen mag op willekeurige afstand van een andere niet-lege plek liggen.) Ze stoppen zodra een speler geen steen meer kan plaatsen. Bepaal de grootste K zodanig dat Albert gegarandeerd minstens K rode stenen kan plaatsen, hoe Beatrix haar blauwe stenen ook plaatst.

Paardensprong

Bij zo'n opgave is het van belang om eerst te begrijpen wat er precies staat. Wat betekent het dat de afstand niet $\sqrt{5}$ mag zijn en dat er plekken zijn met x en y tussen 1 en 20? Eigenlijk is het makkelijker deze plekken in gedachten te vervangen door een vierkant bord dat bestaat uit 20×20 vakjes. Nu moeten we nog kijken wat de afstand van $\sqrt{5}$ betekent. Twee vakjes liggen $\sqrt{5}$ van elkaar af, als ze precies een paardensprong (een verplaatsing van twee horizontale vakjes en een verticaal vakje, of twee verticale vakjes en een horizontaal vakje) van elkaar verwijderd zijn. Nu we de opgave voor ons begrijpelijker verwoord hebben, kunnen we de opgave proberen te kraken.

Begin met kleine gevallen

Een van de belangrijkste lessen die we leren gedurende de trainingsbijeenkomsten is dat je elke opgave begint door kleine gevallen te doen. Je vult dus kleine getallen in of doet iets anders waardoor de opgave concreter of makkelijker wordt. In deze opgave lijkt dat in eerste instantie moeilijk omdat er geen variabele is, maar het getal 20 kan best door een kleiner getal vervangen worden. Het eerste wat ik dus deed, was de 20 in de opgave vervangen door een 2. We hebben nu dus eigenlijk een bord van 2×2. Dit geval is erg makkelijk en geeft als antwoord dat Albert altijd twee stenen kan plaatsen. Daarna probeerde ik een 3×3-bord. Na wat proberen had ik mezelf ervan overtuigd dat het antwoord hier $K = 4$ was. Vervolgens ging ik door naar het 4×4-bord in de hoop een patroon te ontdekken. Hier werd het wat moeilijker. Doordat er zoveel mogelijke zetten zijn is het moeilijker om zeker te zijn van je antwoord. Ook is het daardoor goed mogelijk dat je jezelf per ongeluk van het verkeerde antwoord overtuigt, waardoor je de opgave nooit zult oplossen. Ikzelf was niet zeker of het antwoord hier 4 of 5 was. Toen ik er niet gelijk uit kwam, ben ik eerst een stap teruggegaan. Wat betekent het eigenlijk als het antwoord bijvoorbeeld 5 zou zijn? Dat betekent dus dat Beatrix door haar stenen slim te plaatsen ervoor kan zorgen dat Albert nooit zes stenen kan plaatsen. Albert kan echter door zijn stenen slim te plaatsen er wel vijf plaatsen. Ook bij het 20×20-bord moet je deze beide kanten geven: een manier waarop Albert zijn stenen kan plaatsen zodat hij er zoveel mogelijk (minstens K) kan plaatsen, en een bewijs dat Albert – als Beatrix het goed speelt – nooit meer dan K stenen kan plaatsen. Misschien lukt het ons een van deze kanten al wel te bewijzen. Nu komt ervaring met olympiadeopgaven om de hoek kijken.

Kleuring van vakjes

Bij de training hebben we redelijk wat opgaven met een bord gezien, waarbij een zogenaamde kleuring van de vakjes handig is. De manier waarop de opgave origineel verwoord was, had ons hier tegengewerkt. Maar we weten nu dat de opgave eigenlijk over een bord en iets met paardensprongen gaat. Dan denk je dus al snel aan een schaakbord. Bij dit bord zijn de vakjes om en om wit en zwart gekleurd. De schaakspelers onder ons weten vast ook wel dat een paard altijd van een wit naar een zwart vakje springt en andersom. Als we nu ons 20×20-bord met een schaakbordpatroon kleuren, hebben we 200 zwarte en 200 witte vakjes. Als twee vakjes een paardensprong van elkaar afliggen, moet de een wit en de ander zwart zijn. Als Albert al zijn stenen dus op zwart gaat leggen, kunnen er nooit twee stenen een paardensprong van elkaar af liggen. Stel nu dat Albert dit gaat doen, hoeveel stenen kan hij dan neerleggen? In het ergste geval voor Albert legt Beatrix haar stenen ook telkens op een zwart vakje. Als na 200 beurten alle zwarte vakjes bedekt zijn, liggen er 100 rode stenen. We weten nu dat Albert sowieso 100 stenen kan neerleggen.

Past er nu nog een rode steen bij, op een *wit* vakje? Mogelijk, als alle rode stenen aan de linkerkant van het bord liggen, dan passen er aan de rechterkant van het bord nog wel rode stenen. Maar het is goed voor te stellen dat Beatrix haar stenen wat meer verspreid heeft neergelegd zodat de rode stenen ook over het hele bord moeten liggen en er dus geen rode stenen meer bij passen. We hebben dus nu ons eerste idee voor een antwoord. Met deze strategie kan Albert hoe dan ook minstens 100 stenen neerleggen. Misschien is dit ook het maximum en geldt dus $K = 100$.

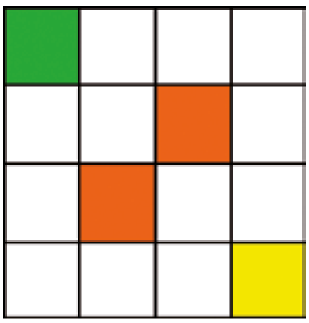
Zoals je kunt zien, hebben we al best veel moeten doen om een eerste idee van een antwoord te krijgen. Ik kan je verklappen dat we gelijk het goede hebben gevonden, maar er zijn genoeg deelnemers die een verkeerd vermoeden hadden. Als je drie opeenvolgende kolommen volledig zwart, wit en oranje kleurt en dat steeds herhaalt en dan alleen op zwarte vakjes speelt, dan komen twee stenen ook nooit $\sqrt{5}$ van elkaar te liggen. De ondergrens die we met deze strategie vinden, is 70 (want er zijn nu 140 zwarte vakjes en in het ergste geval speelt Beatrix ook steeds op een zwart vakje). Maar dit is blijkbaar niet een optimale strategie, want we hebben zojuist al een betere strategie gezien waarmee Albert maar liefst 100 stenen kan plaatsen. Zou het nog beter kunnen?

Bewijs

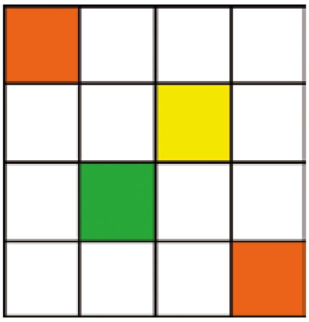
We gaan nu bewijzen dat Beatrix er inderdaad voor kan zorgen dat Albert nooit meer dan 100 stenen kan neerleggen. We kunnen daarvoor net doen alsof het doel van Beatrix is om te zorgen dat Albert zo min mogelijk stenen kan neerleggen. Dit betekent dus dat uiteindelijk hooguit op een kwart van de vakjes een rode steen ligt. Bij de kleinere borden van 2×2 en 3×3 lukte het Albert een groter deel te bedekken. Bij een 4×4-bord was 4 een mogelijk antwoord en dat is precies een kwart van het aantal vakjes. Als we nu kunnen bewijzen dat het antwoord bij een 4×4-bord ook echt $K = 4$ is, zijn we klaar. We kunnen het bord van 20×20 namelijk opdelen in 25 kleinere deelborden van 4×4. Als Albert in elk bord maximaal een kwart van de vakjes kan bedekken, dan kan hij op het hele bord ook maximaal een kwart bedekken en is het maximum dus 100. Hoe vinden we nu een goede strategie bij het 4×4-bord? Natuurlijk hangt deze strategie af van wat Albert doet. We willen de strategie dus verwoorden als: als Albert hier zijn steen neerlegt, dan legt Beatrix haar steen daar neer. Je kunt eens wat proberen en dan vind je de volgende voorwaarden voor de strategie:

1. Beatrix moet bij een schaakbordkleuring telkens op dezelfde kleur spelen als Albert (kun je bedenken waarom?);
2. Je moet kunnen garanderen dat Beatrix op een leeg vakje speelt;
3. Beatrix wil op een vakje spelen dat twee paardensprongen van het vakje van Albert afligt.

De tweede voorwaarde is er een die vaak wordt vergeten, maar die wel belangrijk is: Beatrix moet bij haar strategie wel altijd legale zetten blijven doen. De derde voorwaarde is er een die je echt door je kleine gevallen ingegeven krijgt. We bekijken een voorbeeld, zie figuur 1. Als Albert op het groene vakje speelt, dan kan hij daarna niet meer op de oranje gekleurde vakjes spelen. Albert zou dus de volgende beurt graag op het gele vakje spelen want daardoor zouden er geen extra oranje vakjes (in dit 4×4-vierkant) bij komen. Dus lijkt het slim van Beatrix om op het gele vakje te spelen. Als Albert juist op het gele vakje speelt, geldt dat het voor Beatrix slim is om op het groene vakje te spelen.



figuur 1



figuur 2

Als Albert juist een van de middelste vakjes kiest, zeg het groene vakje in figuur 2, dan zijn de twee oranje hoeken verboden (en daarnaast nog twee andere vakjes die we gemakshalve negeren). Weer is er een (geel) vakje waar Albert nu graag de volgende beurt zou willen spelen. En wederom lijkt het slim als Beatrix juist dit vakje kiest om haar steen te leggen. Het valt op dat de oranje vakjes en de andere gekleurde vakjes precies van plaats zijn gewisseld. In beide gevallen komt op de vier gekleurde vakjes in totaal een rode steen. Dat is precies de verhouding die we willen hebben. Wij hebben voor deze vakjes dus een werkende strategie, die bovendien ook aan voorwaarde 1 en 2 voldoet. Ook voor de andere vakjes kunnen we zo'n strategie vinden. Zo kunnen we het hele bord als volgt indelen, zie figuur 3.

1	2	3	4
6	5	8	7
7	8	5	6
4	3	2	1

figuur 3

Als Albert nu een vakje met getal m erin kiest, dan kiest Beatrix het andere vakje met getal m erin. De vakjes met daarin $9 - m$ zijn zo uitgekozen dat Albert nu in deze vakjes geen steen meer kan leggen. Van de vier vakjes met daarin m of $9 - m$ komt dan op hooguit een vakje één rode steen. Omdat dit voor elke m geldt en voor elk van de 25 deelborden, komt op deze manier op maximaal een kwart van de vakjes een rode steen, dus 100 rode stenen. Deze strategie voor Beatrix werkt dus! We zijn er. We moeten nog wel een argument geven, waarom aan voorwaarde 2 wordt voldaan (waarom is dat?), maar dan zijn we klaar.

Tot slot

De opgave bestond dus uit twee kanten. Bij de ene kant hadden we het schaakbord nodig dat door de verwoording verborgen was. Bij de andere kant moesten we bedenken dat we het bord in 25 kleinere vierkanten konden opdelen en dan een goede strategie binnen dit vierkant vinden. De kant van de schaakbordkleuring is wat simpeler en wat meer standaard; toch was deze voor mij het belangrijkst, want toen ik deze kant had bedacht, had ik een doel waar ik naartoe kon werken: 100.
Deze uitwerking, alleen dan iets formeler opgeschreven, heb ik ook ingeleverd. Ondanks dat mijn bewijs af was, was ik toch blij te horen dat de rest van het team ook op 100 uitkwam en ik dus geen domme fout had gemaakt. Dat betekende dus ook dat het hele Nederlandse team op het goede antwoord was uitgekomen. Hiermee waren we een van de weinige landen die erin waren geslaagd om 100% van de punten voor deze opgave te halen. Voor een van ons leverde dit een eervolle vermelding op: een certificaat dat je krijgt om aan te geven dat je een opgave volledig hebt opgelost. Voor de rest van het team droegen de punten van deze opgave bij aan een score die ervoor zorgde dat ze een medaille kregen. Daardoor konden we uiteindelijk thuiskomen met een eervolle vermelding, vier bronzen medailles en een zilveren medaille!

Het Nederlandse Olympiadeteam met vlnr: Richard Wols (winnaar aanmoedigingsprijs), Matthijs van der Poel, Nils van de Berg, Jippe Hoogeveen, Thomas Chen, Jovan Gerbscheid en Szabi Buzogány

Over de auteur

Als vwo-scholier aan het Sint-Oelbertgymnasium in Oosterhout (Noord-Brabant) heeft Nils van de Berg drie jaar lang deelgenomen aan het trainingsprogramma van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. In zowel 2017 als 2018 maakte hij deel uit van het Nederlandse team dat naar de Internationale Wiskunde Olympiade ging, waar hij achtereenvolgens een eervolle vermelding en een bronzen medaille behaalde. Hij begint dit jaar aan zijn eerste jaar van de studie Mathematics aan Cambridge University.