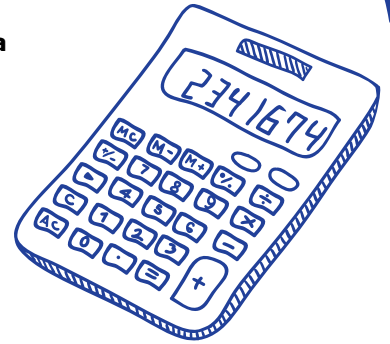


NIVEAU ○○○

NIETS GEPROBEERD IS ALTIJD MIS

In september vond in Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2019 plaats. Hier deden de 144 leerlingen uit het hele land aan mee die na twee rondes waren overgebleven uit 8164 deelnemers aan de eerste ronde in januari. Bij opgave 4 ging het erom een eigenschap te bewijzen van een bepaalde rij getallen. Dat lijkt ontzettend lastig, totdat je gewoon maar eens een beginnetje maakt.

door **Richard Wols**



OPGAVE 4, VERSIE KLAS 6, FINALE 2019

De rij van Fibonaccigetallen F_0, F_1, F_2, \dots wordt gedefinieerd door $F_0 = F_1 = 1$ en $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ voor alle $n \geq 0$.

De getallenrij a_0, a_1, a_2, \dots wordt vervolgens gedefinieerd door

$$a_n = \frac{1}{F_n F_{n+2}}$$

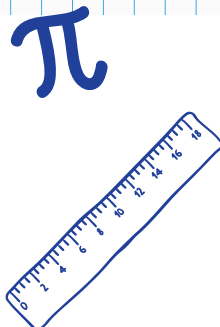
voor alle $n \geq 0$.

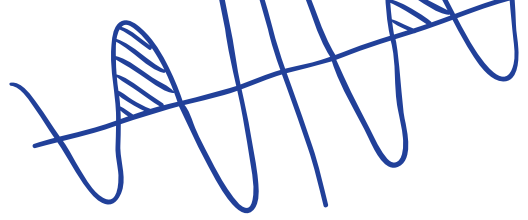
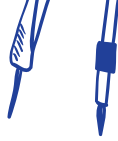
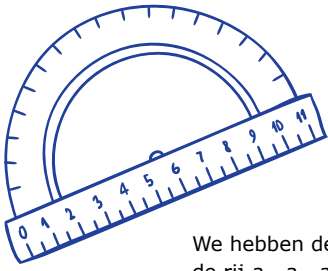
Bewijs dat voor alle $m \geq 0$ geldt:
 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m < 1$.

Misschien heb je wel eens van de Fibonaccigetallen gehoord, maar misschien ook niet. In ieder geval is het een goed idee om te bekijken wat dit voor getallen zijn; misschien kan je dit later gebruiken. Laten we daarom een paar getallen van die rij uitrekenen:

Fibonacci-getal	Berekening	Waarde
F_0	Gegeven	1
F_1	Gegeven	1
F_2	$F_0 + F_1$	$1 + 1 = 2$
F_3	$F_1 + F_2$	$1 + 2 = 3$
F_4	$F_2 + F_3$	$2 + 3 = 5$
F_5	$F_3 + F_4$	$3 + 5 = 8$
F_6	$F_4 + F_5$	$5 + 8 = 13$
F_7	$F_5 + F_6$	$8 + 13 = 21$
\vdots	\vdots	\vdots

Daar zit je dan, bij de finale, en dan lees je deze finaleopgave. Er worden veel nieuwe dingen geïntroduceerd, zoals de Fibonaccigetallen, een rij a_0, a_1, a_2, \dots en een som van een beginstuk van deze rij, die kleiner dan 1 zou moeten zijn, hoeveel termen je ook neemt. Hoe zou je zo iets kunnen aanpakken?





We hebben deze Fibonaccigetallen nodig om de rij a_0, a_1, a_2, \dots te maken. We rekenen van deze rij a_0, a_1, a_2, \dots ook de eerste termen uit:

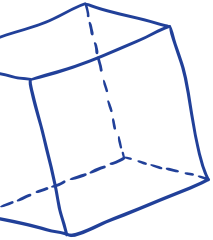
τ

a_n	Berekening	Waarde
a_0	$\frac{1}{F_0 F_2}$	$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$
a_1	$\frac{1}{F_1 F_3}$	$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$
a_2	$\frac{1}{F_2 F_4}$	$\frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$
a_3	$\frac{1}{F_3 F_5}$	$\frac{1}{3 \cdot 8} = \frac{1}{24}$
a_4	$\frac{1}{F_4 F_6}$	$\frac{1}{5 \cdot 13} = \frac{1}{65}$

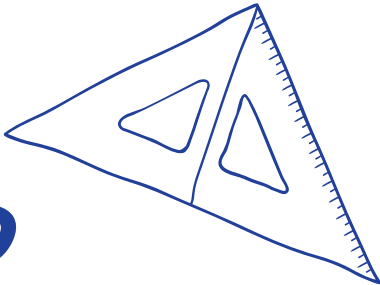
NOG EVEN VOLHOUDEN

Nadat je dit allemaal hebt uitgerekend, vraag je je misschien af of dit wel allemaal nodig was. Op de finale heb je immers maar een beperkte hoeveelheid tijd en het uitrekenen van deze getallen duurt wel eventjes. Toch is het berekenen van een paar getallen altijd een goed idee, want meestal kom je dan een mooi patroon tegen. Zo'n patroon kun je dan gebruiken om de opgave op te lossen.

Wat de opgave vraagt, is om te bewijzen dat de som van de eerste zoveel termen van de rij a_0, a_1, a_2, \dots altijd kleiner dan 1 is, hoeveel we er ook samen nemen. We noemen S_m de som van de eerste $m + 1$ termen, dus $S_m = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m$.



λ



β

Ook nu berekenen we weer de eerste paar termen van deze nieuwe rij:

$$S_0 = a_0 = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = a_0 + a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Voor het berekenen van $S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ kunnen we gebruikmaken van de eerdere berekening $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Zo vinden we:

$$S_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{10} = \frac{25}{30} + \frac{3}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Op dezelfde manier zien we ook:

$$S_3 = \frac{14}{15} + \frac{1}{24} = \frac{117}{120} = \frac{39}{40}$$

ZOEK HET PATROON

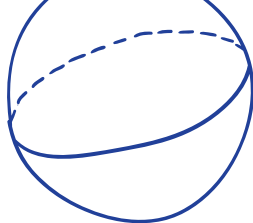
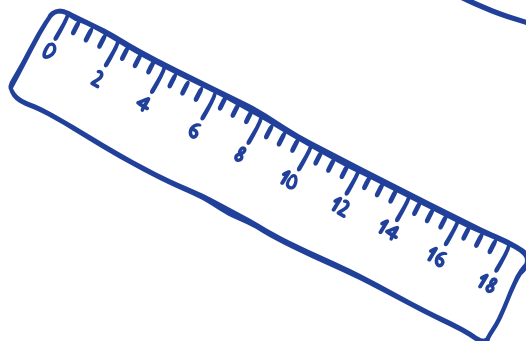
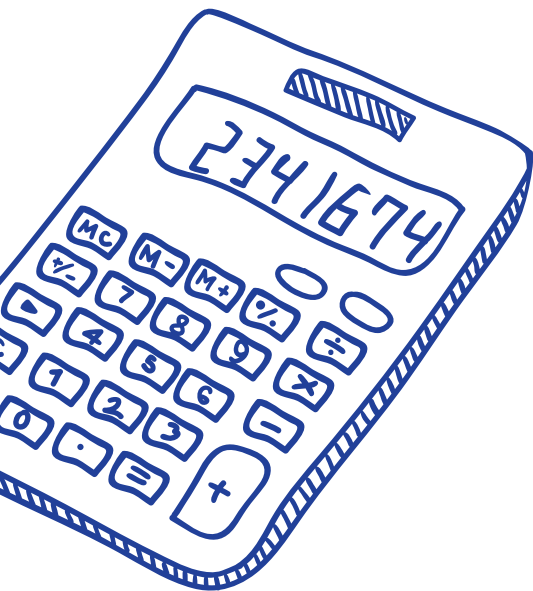
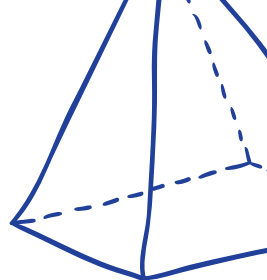
We zien dat al deze sommen inderdaad kleiner zijn dan 1. Wat verder opvalt, is dat de teller na vereenvoudiging telkens precies eentje kleiner is dan de bijbehorende noemer. Dat kan geen toeval zijn! Is er misschien nog iets met deze tellers en noemers aan de hand? We kunnen altijd kijken of we iets kunnen vinden, want niets geprobeerd is altijd mis!

We kijken eerst maar eens naar de noemers. Om een leuk patroon te zoeken, is het altijd een goed idee om de priemontbinding van de noemers te bekijken:

$$2 = 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \\ 40 = 2^3 \cdot 5 = 5 \cdot 8$$

Maar wacht eens even, deze cijfers komen ons bekend voor, dit zijn namelijk Fibonaccigetallen! Het lijkt dus dat de noemers altijd het product zijn van twee opeenvolgende Fibonaccigetallen; voor deze eerste vier termen van de rij is het in ieder geval waar. We komen hiermee op het vermoeden dat de som S_m voldoet aan de formule:

$$S_m = \frac{F_{m+1} F_{m+2} - 1}{F_{m+1} F_{m+2}}$$

π  β  μ

Als dit vermoeden klopt, dan hebben we meteen de opgave opgelost. Het is dan namelijk duidelijk dat $S_m < 1$ voor alle m . Dus nu moeten we deze formule nog bewijzen.

De formule klopt voor S_0 tot en met S_3 ; aan de hand van die waarden hadden we de formule immers opgesteld. Geldt hij ook voor S_4 ? In plaats van expliciete waarden in te vullen, kijken we of we het kunnen bewijzen door simpelweg de Fibonacci-tallen te laten staan en te gebruiken wat we al weten. We weten al dat:

$$S_3 = \frac{F_4 F_5 - 1}{F_4 F_5}$$

en dat $S_4 = S_3 + a_4$. Wanneer we dit invullen, vinden we dat:

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{F_4 F_5 - 1}{F_4 F_5} + \frac{1}{F_4 F_6} \\ &= \frac{F_6 (F_4 F_5 - 1)}{F_4 F_5 F_6} + \frac{F_5}{F_4 F_5 F_6} \\ &= \frac{F_4 F_5 F_6 - F_6 + F_5}{F_4 F_5 F_6} \end{aligned}$$

Maar $F_6 = F_4 + F_5$, want dat is gegeven in

de opgave. Daarom geldt $F_6 - F_5 = F_4$. Als we dit invullen, zien we:

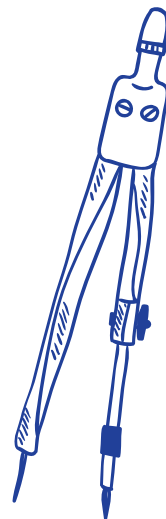
$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{F_4 F_5 F_6 - F_4}{F_4 F_5 F_6} \\ &= \frac{F_5 F_6 - 1}{F_5 F_6} \end{aligned}$$

De formule geldt dus ook voor S_4 . Mooi, maar de volgende vraag is natuurlijk of deze ook voor S_5 geldt. En hier is het antwoord verassend genoeg direct "Ja!": voor S_5 kunnen we weer precies dezelfde redenatie gebruiken als we voor S_4 deden. Maar dan moet hij op dezelfde manier óók voor S_6 gelden, óók voor S_7 , óók voor S_8 , en ga zo maar door. De formule moet dus kloppen voor alle S_m en daarmee hebben we de opgave opgelost.

TERUGBLIK

Bij deze opgave kon je op twee manieren dingen proberen. De eerste was dat je wat termen van de rij S_m ging uitrekenen; de tweede was dat je ging zoeken naar een leuk patroon om dit vervolgens te bewijzen. Met dit leuke patroon konden we de opgave uiteindelijk oplossen.

De strategie van een paar waardes "uitproberen" is een methode die bij de Wiskunde Olympiade het proberen van kleine gevallen wordt genoemd. Dit werkt vaak erg goed en is daarom meestal een van de eerste dingen die je doet als je een wiskundeopgave wilt oplossen.

 \angle