Woensdag 15 juli 2009

Opgave 1. Laat n een positief geheel getal zijn en laat $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geqslant 2)$ verschillende gehele getallen uit de verzameling $\{1, \ldots, n\}$ zijn, zodanig dat n een deler is van $a_i(a_{i+1} - 1)$ voor $i = 1, \ldots, k-1$.
Bewijs dat n géén deler is van $a_k(a_1 - 1)$.

Opgave 2. Zij ABC een driehoek en O het middelpunt van zijn omgeschreven cirkel. Laat P en Q inwendige punten zijn van respectievelijk de zijden CA en AB. Laat K, L en M de middens zijn van respectievelijk de lijnstukken BP, CQ en PQ en zij Γ de cirkel door K, L en M. Veronderstel dat de lijn PQ raakt aan de cirkel Γ.
Bewijs dat $|OP| = |OQ|$.

Opgave 3. Zij $s_1, s_2, s_3, \ldots$ een strikt stijgende rij van positieve gehele getallen zodanig dat de deelrijen

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{en} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

allebei rekenkundige rijen zijn.
Bewijs dat $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ook een rekenkundige rij is.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elk probleem is 7 punten waard

Donderdag 16 juli 2009

Opgave 4. Zij ABC een driehoek met $|AB| = |AC|$. De binnenbissectrices van $\angle CAB$ en $\angle ABC$ snijden de zijden BC en CA respectievelijk in D en E. Zij K het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek ADC. Veronderstel dat $\angle BEK = 45°$.

Bepaal alle mogelijke waarden van $\angle CAB$.

Opgave 5. Bepaal alle functies $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ van de verzameling van positieve gehele getallen naar de verzameling van positieve gehele getallen, zodanig dat er voor alle positieve gehele getallen a en b een niet-ontaarde driehoek bestaat met zijdelengten

$$a, \ f(b) \ \text{ en } \ f(b + f(a) - 1).$$

(Een driehoek heet *niet-ontaard* als zijn hoekpunten niet-collineair zijn.)

Opgave 6. Zij n een positief geheel getal en laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verschillende positieve gehele getallen zijn. Zij M een verzameling van $n-1$ positieve gehele getallen die niet het getal $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ bevat. Een sprinkhaan beweegt al springend over de getallenlijn (getallenas). Hij start in het punt 0 en maakt n sprongen naar rechts met lengten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in een volgorde naar zijn keuze.

Bewijs dat de sprinkhaan die volgorde zodanig kan kiezen dat hij nooit op een punt van M terechtkomt.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elk probleem is 7 punten waard