De 13e Internationale Wiskunde Olympiade

PROF. DR. J.H. VAN LINT

Eindhoven

De in de titel genoemde, vorig jaar te Zilina gehouden Olympiade bestond uit 6 vraagstukken. Voor elk van deze vraagstukken geven we hieronder één of meer oplossingen en eventueel enig commentaar. Vooral de laatste opgave geeft nog volop gelegenheid tot verder onderzoek. Uit de oplossingen zal blijken dat, behalve vernuft, van de deelnemers ook meer kennis verwacht wordt dan nodig is voor het eindexamen. Wat betreft resultaten en ander commentaar verwijzen we naar Pythagoras **11**, No. 2.

Opgave I. n is een natuurlijk getal, groter dan 2. Bewijs dat de bewering:

'Voor elke n-tal reële getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geldt

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) + \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) \geqslant 0\text{'}$$

waar is voor $n = 3$ en voor $n = 5$, maar voor alle andere waarden van n fout is.

In onderstaande oplossingen schrijven we

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (a_i - a_j).$$

In alle oplossingen nemen we (zonder verlies van algemeenheid)

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n .$$

Oplossing I. Met alleen maar volharding en schrijfwerk is deze opgave als volgt op te lossen:

(i) $n = 3$. Er geldt

$$F_3(a_1, a_2, a_3) = \tfrac{1}{2}\{(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2\} \geqslant 0.$$

(ii) $n = 5$. Voer in $b_i := a_{i+1} - a_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dan is

$$F_5(a_1, a_2, \ldots, a_5) = b_1(b_1 + b_2)(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) -$$

$$-b_1b_2(b_2+b_3)(b_2+b_3+b_4) + (b_1+b_2)b_2b_3(b_3+b_4) -$$
$$-(b_1+b_2+b_3)(b_2+b_3)b_3b_4 +$$
$$+(b_1+b_2+b_3+b_4)(b_2+b_3+b_4)(b_3+b_4)b_4.$$

Het is duidelijk dat iedere term in de uitwerking van het tweede produkt ook voorkomt in de uitwerking van het eerste produkt en wel met verschillend teken. Zo ook voor het vierde en vijfde produkt. Tenslotte blijven dus alleen termen met een + teken over en daar alle $b_i \geqslant 0$, is $F_5(a_1, a_2, \ldots, a_5) \geqslant 0$.

(iii) $n \geqslant 4$, n even. Kies

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-4} = -1,\ a_{n-3} = 0,\ a_{n-2} = a_{n-1} = a_n = 1$$

(als $n = 4$ vervalt de eerste serie). Dan is $F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -1$.

(iv) $n \geqslant 7$, n oneven. Kies

$$a_1 = a_2 = a_3 = -1,\ a_4 = 0,\ a_5 = a_6 = \ldots = a_n = 1.$$

Dan is $F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -1$.

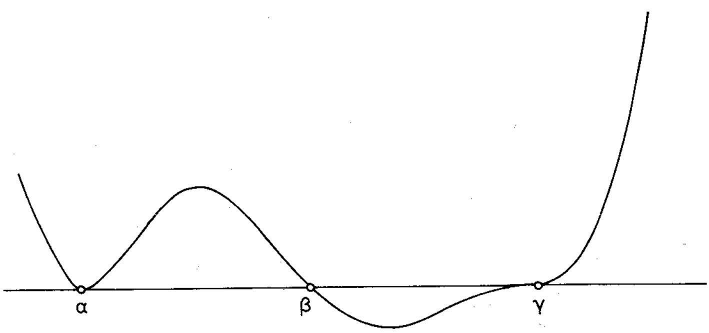
Oplossing 2. Voer in

$$f(x) := (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Dan zijn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de nulpunten van de veelterm f en

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} f'(a_i).$$

Om nu te bereiken dat $F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0$ kiezen we de nulpunten zó dat $f'(a_i) = 0$ voor alle i op één na en in dit uitzonderingspunt zorgen we dat de afgeleide negatief is. Voor n even, $n \geqslant 6$, gaat dit als in figuur 1.



Figuur 1

Met $\alpha < \beta < \gamma$ kiezen we

$$f(x) = (x - \alpha)^{n-4} (x - \beta) (x - \gamma)^3.$$

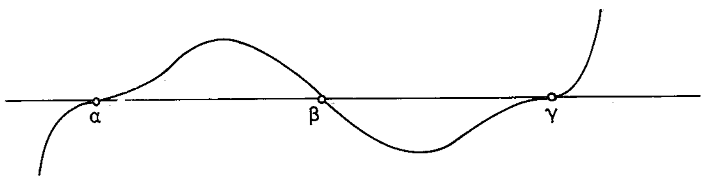
Dan is

$$f'(\alpha) = f'(\gamma) = 0 \quad \text{en} \quad f'(\beta) = (\beta - \alpha)^{n-4} (\beta - \gamma)^3 < 0.$$

Voor n oneven, $n \geqslant 7$, kiezen we

$$f(x) = (x - \alpha)^3 (x - \beta) (x - \gamma)^{n-4}$$

als in figuur 2.



Figuur 2

Merk op dat oplossing 1 en oplossing 2 in feite hetzelfde zijn.
We beschouwen nu $n = 3$. Neem de eerste twee termen samen:

$$F_3(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geqslant 0.$$

In onze terminologie betekent dit dat de som van de waarden van de afgeleide van

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

in de nulpunten niet negatief is. Dit geldt ook voor

$$g(x) := x^3 + px^2 + qx + r$$

als deze slechts één reëel nulpunt heeft.
Voor $n = 5$ schrijven we $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) g(x)$. Dan is

$$f'(a_1) = (a_1 - a_2) g(a_1) \quad \text{en} \quad f'(a_2) = (a_2 - a_1) g(a_2).$$

Daar g monotoon toenemend is voor $x \leqslant a_3$ vinden we

$$f'(a_1) + f'(a_2) \geqslant 0.$$

Evenzo is

$$f'(a_4) + f'(a_5) \geqslant 0.$$

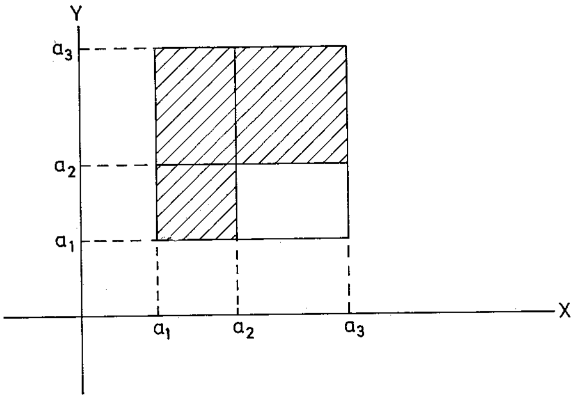
Verder is $f'(a_3) \geqslant 0$ omdat als a_3 een enkelvoudig nulpunt van f is, de functie in een linkeromgeving van a_3 negatief is en in een rechteromgeving positief.

Oplossing 3. (i) Als n even is bestaat iedere term in de som uit een oneven aantal factoren. Dus is

$$F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -F_n(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n).$$

Daar F_n niet identiek 0 is volgt het gestelde.

(ii) Voor $n = 3$ beschouwen we figuur 3:



Figuur 3

Het is nu voldoende op te merken dat $F_3\ (a_1, a_2, a_3)$ de oppervlakte is van het gearceerde gedeelte.

(iii) $n = 5$. In de som $F_5\ (a_1, a_2, \ldots, a_5)$ zijn de tweede en vierde term $\leqslant 0$ en de andere drie $\geqslant 0$. Daar

$$a_3 - a_2 \geqslant a_3 - a_2,\ a_4 - a_1 \geqslant a_4 - a_2,\ a_5 - a_1 \geqslant a_5 - a_2 \text{ is}$$

$$|(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) \geqslant$$

$$\geqslant |(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)|\ .$$

Evenzo voor de vierde en vijfde term. Dus is $F_5\ (a_1, a_2, \ldots, a_5) \geqslant 0$.

(iv) $n \geqslant 7$, n oneven. Kies

$$a_{n-2} = a_{n-1} = a_n = y.$$

Dan is bij geschikte keuze van het $(n-3)$-tal

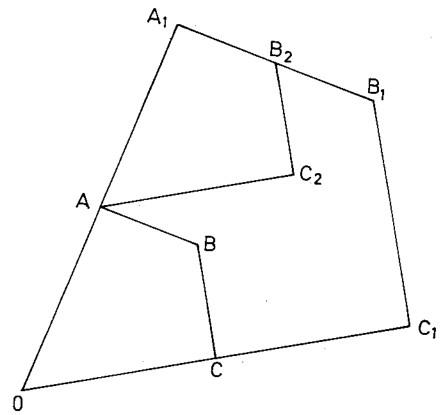
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}) \text{ de functie } F_n\ (a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, y, y, y)$$

een veelterm van de graad 3 (dit geldt niet voor $n = 5$); immers de coëfficiënt van y^3 is $-F_{n-3}\ (a_1, a_2, \ldots, a_{n-3})$ en voor $n \geqslant 6$ is dit niet identiek 0.
Een veelterm van de graad 3 neemt negatieve waarden aan.

Opgave II. Gegeven is een convex veelvlak P_1 met precies 9 hoekpunten A_1, $A_2, \ldots, A_9$. Met P_i $(i = 2, 3, \ldots, 9)$ wordt het veelvlak aangeduid, dat uit P_1 ont-

staat door de translatie (evenwijdige verschuiving) toe te passen, die A_1 op de plaats van A_i brengt.
Bewijs, dat tenminste twee van de veelvlakken $P_1, P_2, \ldots, P_9$ gemeenschappelijke inwendige punten hebben.

Oplossing. Om een idee te vinden voor de oplossing van dit probleem beschouwen we een analoog probleem in 2 dimensies. Zij $OABC$ een convexe vierhoek in $\mathbb{R}^2$ (waarvan we één hoekpunt in de oorsprong hebben gekozen). (Zie figuur 4)



figuur 4

Laat de gelijkvormige vierhoek $OA_1B_1C_1$ uit $OABC$ ontstaan door vermenigvuldiging met 2 vanuit O. Translatie van $OABC$ zó dat O in A terechtkomt voert $OABC$ over in $AA_1B_2C_2$ waarbij A_1B_2 langs A_1B_1 valt. We zien dat $OABC$ en de 3 daarmee congruente vierhoeken die ontstaan door translatie van O naar resp. A, B en C alle geheel binnen $OA_1B_1C_1$ liggen.
Nu is de oplossing van het gestelde probleem duidelijk en we zien ook waarom juist 9 hoekpunten zijn genomen! We kiezen nu A_1 als oorsprong en vermenigvuldigen het gegeven veelvlak vanuit A_1 met 2 waardoor $A_2', A_3', \ldots, A_9'$ ontstaan. We noemen dit veelvlak P'. Zij I de inhoud van het veelvlak P_1. Voor $i = 2, 3, \ldots,$ 9 heeft ook P_i inhoud I terwijl de inhoud van P' gelijk is aan $8I$. Dus moeten er twee veelvlakken P_i en P_j zijn ($1 \leqslant i < j \leqslant 9$) die inwendige punten gemeen hebben, daar iedere P_i in P' is bevat.
Merk op dat het analogon in $\mathbb{R}^n$ geldt voor convexe lichamen met $k = 2^n + 1$ hoekpunten.

Opgave III. Bewijs, dat men uit de rij $t_k = 2^k - 3$ ($k = 2, 3, \ldots$) een oneindig aantal termen kan kiezen zo, dat elk tweetal gekozen termen onderling ondeelbaar is.

Oplossing 1. Zoals gebruikelijk schrijven we $m|n$ als het gehele getal m een deler is van het gehele getal n. Verder ook $a \equiv b \pmod n$ voor $n|(a-b)$ en we geven met (m, n) de grootste gemene deler van m en m aan. We gebruiken de stelling van Euler-Fermat in de vorm

Is p een priemgetal en $(a, p) = 1$, dan is $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.
Om de gevraagde deelrij te construeren beschouwen we eerst $n = 2^k - 3$ en een priemgetal p met $p|n$ (dus $p \neq 2, p \neq 3$). Uit $2^k \equiv 3 \pmod p$ volgt voor m geheel, $m > 0$:

$$2^{mk(p-1)} \equiv (3^{p-1})^m \equiv 1 \pmod p.$$

(Hierbij gebruiken we het feit dat uit $a_1 \equiv a_2 \pmod m$ en $b_1 \equiv b_2 \pmod m$ volgt $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod m$.)
Kies nu t zó dat voor iedere p met $p|n$ geldt $(p-1)|t$. Dan is voor elk dezer priemgetallen p

$$2^{tk} \equiv 1 \pmod p\,, \quad \text{d.w.z.} \quad 2^{tk} - 3 \not\equiv 0 \pmod p,$$

m.a.w.

$$(n, 2^{tk} - 3) = 1.$$

Definieer nu

$$n_1 := 2^3 - 3 = 5 \quad \text{en} \quad k_1 := 3,$$

$$k_{i+1} := k_i \prod_{p|n_i} (p-1) \qquad (i \geqslant 1),$$

$$n_{i+1} := 2^{k_{i+1}} - 3 \qquad (i \geqslant 1).$$

Uit het bovenstaande volgt dat voor $i \neq j$ geldt $(n_i, n_j) = 1$. Hiermee is de gevraagde deelrij geconstrueerd. De door ons gedefinieerde rij begint met $n_1 = 2^3 - 3 = 5$, $n_2 = 2^{12} - 3 = 4093, \ldots$.

Oplossing 2. We geven een variant op bovenstaande oplossing waarbij de stelling van Euler-Fermat niet wordt gebruikt. Zij p een priemgetal, $p \neq 3$. We delen de termen van de rij $3, 3^2, 3^3, \ldots$ door p en vinden als resten $r_1, r_2, \ldots$. Daar er slechts $p - 1$ mogelijke resten zijn is er een i en een $j > i$ zó dat $r_i = r_j$, d.w.z. $p|(3^j - 3^i)$ en dus $p|(3^{j-i} - 1)$.
Hiermee is aangetoond dat er een kleinste natuurlijk getal $e(p)$ is zó dat $3^{e(p)} \equiv 1 \pmod p$. Dan is ook

$$3^{ne(p)} - 1 = (3^{e(p)} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} 3^{e(p)i} \equiv 0 \pmod p$$

voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Zij nu

$$\psi(n) := \prod_{p|n} e(p).$$

Kies

$$n_1 := 2^3 - 3 = 5, \quad k_1 := 3,$$

$$k_{i+1} := \psi(n_1)\ \psi(n_2) \ldots \psi(n_i), \qquad (i \geqslant 1),$$

$$n_{i+1} := 2^{k_{i+1}} - 3, \qquad (i \geqslant 1).$$

Is $j > i$ en pn_i dan volgt uit de constructie dat $n_j \equiv -2 \pmod p$.
Dus is $(n_i, n_j) = 1$.

Opmerking: Het 'complementaire' probleem heeft ook een eenvoudige oplossing. Zij φ de indicator van Euler, d.i.

$$\varphi(n) := n \prod_{p \mid n} (1 - p^{-1}).$$

Dan is, als n oneven is, $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ (Euler-Fermat). Definieer nu

$$n_1 := 2^3 - 3 = 5, \qquad k_1 := 3,$$

$$k_{i+1} := k_i + \varphi(n_i) \qquad (i \geqslant 1),$$

$$n_{i+1} := 2^{k_{i+1}} - 3 \qquad (i \geqslant 1).$$

Dan is

$$n_{i+1} = 2^{k_i}(2^{\varphi(n_i)} - 1) + (2^{k_i} - 3) \equiv 0 \pmod{n_i}.$$

De zo geconstrueerde deelrij heeft de eigenschap dat iedere term veelvoud is van al zijn voorgangers.

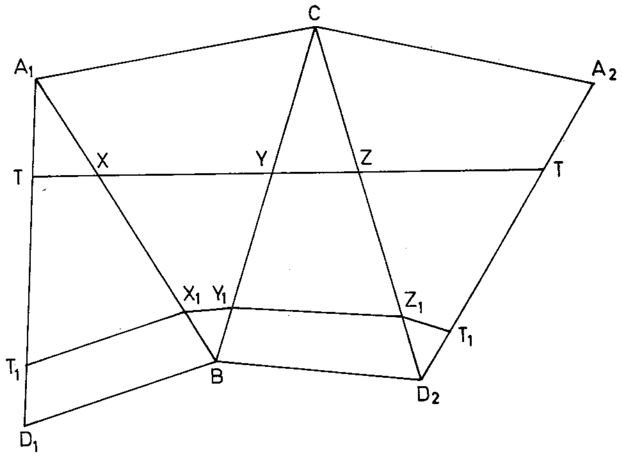
Opgave IV. ABCD is een viervlak, waarvan alle zijvlakken scherphoekige driehoeken zijn.
We beschouwen alle gesloten, gebroken lijnen *XYZTX*, die als volgt gedefinieerd worden:

X is een punt van de ribbe *AB*, dat niet met *A* of *B* samenvalt.
Evenzo zijn *Y, Z, T* inwendige punten van de ribben *BC, CD* en *DA* (in deze volgorde).

Bewijs:
(a) Als de som van de hoeken *DAB* en *BCD* ongelijk is aan de som van de hoeken *ABC* en *CDA,* dan bevindt zich onder die gesloten gebroken lijnen geen kortste.

(b) Als de som van de hoeken *DAB* en *BCD* wel gelijk is aan de som van de hoeken *ABC* en *CDA,* dan zijn er oneindig veel kortste gebroken lijnen *XYZTX* en deze hebben allemaal de lengte 2 *AC* sin $\frac{\alpha}{2}$, waarin α de som van de hoeken *BAC, CAD* en *DAB* voorstelt.

Oplossing. (a) Beschouw onderstaande uitslag van het viervlak (figuur 5).



Figuur 5

We nemen aan dat er onder de genoemde gebroken lijnen $TXYZT$ een kortste is. Zo'n lijn kan niet de ligging hebben van $T_1X_1Y_1Z_1T_1$ in de figuur. Daar immers T_1, X_1, Y_1 niet op één rechte liggen en X_1 inwendig punt van AB is kan door verplaatsing van X_1 de gebroken lijn verkort worden. Een kortste gebroken lijn (dat is een *gesloten geodeet* op het viervlak) is in de uitslag dus een lijnstuk $TXYZT$. Een kleine verplaatsing van T in de richting van A of D zal de lengte van $TXYZT$ verkleinen tenzij in de uitslag A_1D_1 en A_2D_2 evenwijdig zijn. In het laatste geval hangt de lengte niet af van de plaats van T op AD. De eis $A_1D_1//A_2D_2$ is vervuld als de som van de hoeken ABC en CDA gelijk is aan de som van de hoeken DAB en BCD.

(b) We nemen nu aan dat aan de conditie van (a) is voldaan. Er zijn dan oneindig veel gesloten geodeten $TXYZT$. De lengte van deze geodeet is de lengte van A_1A_2 en dat is $2\,AC \sin \frac{\beta}{2}$ waarin β de som van de hoeken ACB, BCD en DCA is. Het gestelde volgt direkt uit de relatie $\alpha + \beta = 360^\circ$.

Opmerking. We wijzen op de behandeling van een verwant probleem, nl. dat van oneindige geodeten op een viervlak, in K.A. Post, Geodesic lines on a bounded closed convex polyhedron, Studia Scientiarum Math. Hungarica *5* (1970), p 411-416.

Opgave V. Bewijs, dat er bij elk positief geheel getal m een niet lege, eindige puntenverzameling S in het vlak bestaat met de volgende eigenschap: elk punt van S ligt op afstand 1 verwijderd van precies m andere punten van S.

Oplossing. We geven de punten van het vlak aan in vectornotatie. De lengte van $\underline{x}$ geven we aan met $|\underline{x}|$. Voor $m = 1$ is $S_1 := \{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$ waarin $|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| = 1$ een oplossing van het probleem. Als $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ een gelijkzijdige driehoek vormen ($|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| = |\underline{x}_2 - \underline{x}_3| = |\underline{x}_3 - \underline{x}_1| = 1$) dan is $S_2 := \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3\}$ een oplossing

van het probleem voor $m = 2$. We geven de oplossing met volledige inductie. Laat voor zekere $m \geqslant 2$ de verzameling $S_m := \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n(m)}\}$ een oplossing zijn. We willen nu $\underline{y}$ zó kiezen dat $S_{m+1} := S_m \cup \{\underline{x}_1 + \underline{y}, \underline{x}_2 + \underline{y}, \ldots, \underline{x}_{n(m)} + \underline{y}\}$ een oplossing is voor $m + 1$.
Hiertoe nemen we $|\underline{y}| = 1$. We eisen dat géén der n(m) nieuwe punten $\underline{x}_i + \underline{y}$ met een punt van S_m samenvalt, d.w.z.

$$\underline{x}_i + \underline{y} \neq \underline{x}_j \quad \text{voor alle } i \text{ en } j. \tag{1}$$

We eisen verder dat elk der nieuwe punten afstand 1 tot precies één van de punten van S_m heeft, dus

$$|\underline{x}_i + \underline{y} - \underline{x}_j| \neq 1 \quad \text{als } i \neq j. \tag{2}$$

Door de eisen (1) en (2) worden slechts eindig veel vectoren y met lengte 1 uitgesloten. Bij (1) is dit triviaal. Bij (2) volgt dit uit het feit dat de twee cirkels

$$\{\underline{y} \mid |\underline{y}| = 1\} \qquad \text{en} \qquad \{\underline{y} \mid |\underline{a} + \underline{y}| = 1\}$$

als $\underline{a} \neq 0$ ten hoogste twee punten gemeen hebben. Daar er oneindig veel vectoren $\underline{y}$ zijn met $|\underline{y}| = 1$ kunnen we inderdaad $\underline{y}$ zó kiezen dat aan alle eisen is voldaan.
Het is nu duidelijk dat S_{m+1} een oplossing van het probleem is.
Het gestelde is hiermee bewezen waarbij S_m voor $m \geqslant 2$ uit $3 \cdot 2^{m-2}$ punten bestaat.

Opmerking. Een aardige opgave is om na te gaan of er oplossingen met minder punten zijn te vinden.

Opgave VI. We beschouwen een vierkante (n bij n) tabel niet-negatieve gehele getallen

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

die de volgende eigenschap heeft:

voor elke i en elke j geldt: als $a_{ij} = 0$ dan is de som van de elementen in de i-de rij plus de som van de elementen in de j-de kolom tenminste gelijk aan n.

Met a_{ij} wordt hierin bedoeld het element, dat in de i-de rij en in de j-de kolom van de tabel staat.
Bewijs, dat de som van alle elementen van de tabel niet kleiner is dan $\frac{1}{2}n^2$.

Oplossing. 1. Van alle rijen en kolommen beschouwen we er één met minimale som. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat dit de eerste rij is en verder dat $a_{1j} = 0$ voor $1 \leqslant j \leqslant r$, $a_{1j} > 0$ voor $r < j \leqslant n$. Laat s de som van de eerste rij zijn, dus $s \geqslant n - r$. Is $s \geqslant \frac{1}{2}n$, dan is het gestelde triviaal. Neem dus aan dat $n - 2s > 0$ is. Voor $1 \leqslant j \leqslant r$ is gegeven dat de som s_j van de j-de kolom groter of gelijk is aan $n - s$. Voor $j > r$ is de som van de j-de kolom groter of gelijk aan s. Dus is

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} s_j \geqslant r(n-s) + (n-r)s =$$

$$= (n-2s)r + ns \geqslant (n-2s)(n-s) + ns =$$

$$= 2(s - \tfrac{1}{2}n)^2 + \tfrac{1}{2}n^2 \geqslant \tfrac{1}{2}n^2.$$

Oplossing 2. Het verwisselen van twee rijen (of kolommen) van de matrix (= tabel) verandert de som van de elementen niet en aan de voorwaarden van het vraagstuk blijft voldaan. Neem nu aan dat zulke verwisselingen worden uitgevoerd tot het aantal nullen op de hoofddiagonaal (dat is $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$) maximaal is. Noem dit aantal s en laat $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{ss} = 0$ zijn. Dan moet voor $i > s, j > s$ gelden $a_{ij} \geqslant 1$ en bovendien voor $1 \leqslant i \leqslant s$, $s < j \leqslant n$ gelden $a_{ij} + a_{ji} \geqslant 1$, daar in beide gevallen anders een verwisseling te vinden is die het aantal nullen op de hoofddiagonaal vergroot. Gegeven is dat voor $t \leqslant s$ geldt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} \geqslant n. \tag{1}$$

Uit het bovenstaande volgt verder dat voor $t > s$ geldt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} \geqslant s + 2(n-s) = 2n - s. \tag{2}$$

Uit (1) en (2) volgt

$$2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{tj} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant ns + (n-s)(2n-s) = n^2 + (n-s)^2 \geqslant n^2.$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Tot slot van dit artikel willen we nader ingaan op de achtergronden van het laatste vraagstuk en een generalisatie noemen die nog onopgelost is.
Een mogelijke verklaring voor mutaties is in de genetica gezocht in het toekennen van diverse 'coderingen' aan de aminozuren en wel zó dat steeds slechts één wijziging nodig is om een codering van een aminozuur in die van een gegeven ander aminozuur om te zetten. (Dit is helaas niet het geval.) Deze veronderstelling heeft geleid tot de theorie van 'error-distributing codes' die we in het kort op meetkundige wijze introduceren.
Beschouw in $\mathbb{R}^k$ de punten $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ waarvan alle coördinaten uit $\{1, 2, \ldots, n\}$ zijn gekozen. Noem deze verzameling V_n^k. Als een voorbeeld zouden

we kunnen denken aan een schaakbord waarin ieder vak van coördinaten is voorzien. Hier is $k = 2, n = 8$. We noemen V_n^k een 'k-dimensionaal schaakbord met zijde n'. De situatie bij het gewone schaakbord generaliserend definiëren we een *torengebied* $T_{\underline{x}}$ als $\underline{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in V_n^k$ door

$$T_{\underline{x}} := \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V_n^k \mid y_i = \underline{x}_i \text{ voor alle } i \text{ op één na}\} \cup \{\underline{x}\}.$$

We zullen zeggen dat een toren in $\underline{x}$ alle punten van $T_{\underline{x}}$ '*ziet*'. Het bovengenoemde probleem komt nu neer op het volgende. We kennen aan iedere $\underline{x} \in V_n^k$ een kleur A_i uit een verzameling kleuren $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ toe zó dat iedere $\underline{x} \in V_n^k$ voor een toren in $\underline{x}$ *alle* verschillende kleuren tenminste éénmaal ziet. De grootste waarde van r waarvoor dit mogelijk is noemen we $w(k, n)$. We laten aan de lezer over om de volgende eenvoudige beweringen te bewijzen:

(a) $w(k, n) \leqslant 1 + k(n-1)$

(b) $w(1, n) = n$,

(c) $w(k, 1) = 1$,

(d) $w(k, n)$ is monotoon niet-dalend in k en n,

(e) $w(2, n) = n$.

Een veel lastiger opgave die we ook aan de lezer overlaten is het construeren van voorbeelden waaruit blijkt dat

(f) $w(3, n) \geqslant 2n$ als n even is,
$w(3, n) \geqslant 2n - 1$ als n oneven is.

Beschouw nu een 3-dimensionaal schaakbord met zijde n, dat zoals boven beschreven is gekleurd. Zij A één van de kleuren. Voor $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ definiëren we

$$a_{ij} := \text{het aantal punten } (i, j, t) \in V_n^3 \text{ met kleur } A.$$

Stel $a_{ij} = 0$. Een toren geplaatst in (i, j, t) ziet kleur A. Deze kleur behoort dus bij een punt (i', j, t) of een punt (i, j', t). Dit geldt voor iedere waarde van t. Dan is dus

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} + \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \geqslant n.$$

In opgave VI is bewezen dat hieruit volgt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geqslant \tfrac{1}{2} n^2.$$

Dit geldt voor iedere kleur A. In combinatie met (f) hebben we dan bewezen:

50

$$\textit{Stelling.}\ w(3,n) = \begin{cases} 2n & (n \text{ even}), \\ 2n-1 & (n \text{ oneven}). \end{cases}$$

Ter bestudering van $w(k, n)$ zou nu de volgende generalisatie van opgave VI nuttig zijn:

*Opgave VI**. Laat f een functie zijn gedefinieerd op V_n^k met als functiewaarden niet-negatieve gehele getallen.
Laat f de volgende eigenschap hebben:

$$\text{Als } f(\underline{x}) = 0, \text{ dan is } \sum_{\underline{y} \in T_{\underline{x}}} f(\underline{y}) \geqslant n.$$

Bewijs dat

$$\sum_{\underline{x} \in V_n^k} f(\underline{x}) \geqslant \frac{n^k}{k}$$

Merk op dat opgave VI het geval $k = 2$ is.
Helaas is deze opgave een nog onopgelost probleem! Wel is door A.W. Hales bewezen dat dit vermoeden juist is als f alleen de waarden 0 en 1 aanneemt (cf. A.W. Hales, Cubes with Zeros and Ones, JPL Space Programs Summary, 37-16 (1962), p. 35-36). Hoewel het algemene probleem nog niet is opgelost slaagde E. Rodemich (Coverings by Rook Domains, verschijnt in Journal Comb. Theory) er onlangs in te bewijzen dat

(g) $\quad w(k, n) \leqslant (k-1)n.$

(Merk op dat wij hierboven (g) hebben bewezen voor $k = 3$ met behulp van opgave VI.)
Een zeer lezenswaardig artikel over deze en samenhangende problemen is: S.W. Golomb and E.C. Posner, Rook Domains, Latin Squares, Affine Planes and Error-Distributing Codes, IEEE Transactions on Information Theory IT-10 (1964), p. 196-208.

Voor een aantal waardevolle adviezen bij de samenstelling van dit artikel dank ik O.P. Lossers.