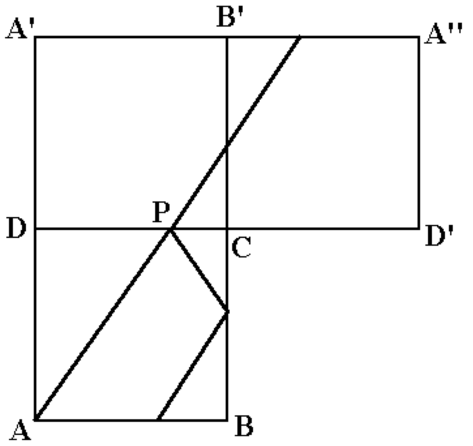
Uitwerkingen van de tweede ronde van 13 september 2002



1. Neem de lengte van de zijde voor het gemak even 1. In plaats van het construeren van de spiegeling van de lijn AP in punt P binnen het vierkant kun je ook het vierkant spiegelen in de zijde CD en dan de lijn AP doortrekken in het gespiegelde vierkant. Deze procedure kun je blijven herhalen tot de lijn door een hoekpunt van een van de vele gespiegelde vierkanten gaat. Als we coördinaten invoeren: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ en $D(0,1)$ dan zal de lichtstraal door het roosterpunt (7,10) een vierkant "verlaten". De lichtstraal heeft dan in totaal een afstand $\sqrt{7^2+10^2}=\sqrt{149}$ afgelegd. Het is eenvoudig na te gaan dat de letter bij dat hoekpunt een B is omdat alle roosterpunten met een A even coördinaten hebben, alle roosterpunten met een C oneven coördinaten hebben en alle roosterpunten met een B een oneven x-coördinaat en een even y-coördinaat hebben. Omdat gegeven is dat de zijde van het vierkant 10 is, is de totale afstand $10\sqrt{149}$.

2. Als alle getallen groter of gelijk aan 3 zijn dan wordt het product kleiner dan $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ en dat is kleiner dan 3. Het kleinste van de getallen, x, moet dus gelijk zijn aan 1 of 2.

Geval $x=1$. Dan moet gelden: $\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{2}$. Voor $y=1$ geeft dit $z=-4$, dus geen oplossing, voor $y=2$ krijgen we $\left(1+\frac{1}{z}\right)=1$ met geen oplossing voor z.

Voor $y>2$ is de vergelijking $\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{2}$ te herschrijven tot $z=2+\frac{6}{y-2}$.

Voor $y=3$ vind je $z=8$, voor $y=4$ vind je $z=5$. Voor alle grotere waarden van y wordt z kleiner dan y.

Geval $x=2$. Dan moet gelden $\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2$. En dit is weer te schrijven als $z=1+\frac{2}{y-1}$. Voor $y=2$ vind je $x=3$. Voor alle grotere waarden van y is z weer kleiner dan y.

De oplossingen zijn dus $(1,3,8)$, $(1,4,5)$ en $(2,2,3)$.

3. Noem de coördinaten van A x_A en y_A. Evenzo voor B x_B, y_B, en voor C x_C en y_C.
Dan zijn de kwadraten van de lengtes van de zijden :
$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$, met AB^2 dus geheel en *AB* geheel (gegeven).
$BC^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2$, met BC^2 dus geheel en *BC* geheel (gegeven).
$CA^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$, met CA^2 dus geheel en *CA* geheel (gegeven).
Uitwerken en optellen levert: $2x_A^2 + 2x_B^2 + 2x_C^2 + 2y_A^2 + 2y_B^2 + 2y_C^2 - 2x_A x_B - .....$ en verdere dubbele producten. Omdat alle coördinaten geheel zijn is de som van de kwadraten van de zijden dus een even getal. Het kwadraat van een even getal is even en het kwadraat van een oneven getal is oneven. Omdat de som van de kwadraten van de zijden even is, moeten de kwadraten van de zijden of allemaal even zijn of twee van de kwadraten zijn oneven en het derde kwadraat is even. In het eerste geval zijn de zijden ook alle drie even en dus ook de omtrek; in het tweede geval zijn twee zijden oneven en de derde zijde even en is dus de omtrek ook even.

4. Donald en Katrien kunnen ergens aan tafel naast elkaar gaan zitten. De acht dan resterende stoelen kun je zien als vier paar stoelen waarbij op elk paar stoelen een paar gaat zitten. Dat geeft dus voor de mogelijke verdelingen van de paren $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ mogelijkheden.
Voor elk paar zijn er daarbij nog 2 mogelijkheden. Dus totaal $4! \times 2^5 = 768$ mogelijkheden.

5. Noem het snijpunt van de bissectrice uit *A* met *BC* *D*. Dan is driehoek *ABD* gelijkbenig.
Dus $BD = AD$.
Verder geldt:
$\angle CDA = \angle DBA + \angle DAB = 2\angle DBA = \angle CAB$.
Dus driehoek CDA is gelijkvormig met driehoek CAB.
Dus $AB : BC : CA = DA : AC : CD$ ofwel
$3 : BC : 2 = DB : 2 : CD$. Dus $3CD = 2BD$.
Dus $DB = \frac{3}{5} BC$. Omdat $BC \times DB = 6$ vinden we $BC^2 = 10$ en dus $BC = \sqrt{10}$.