Uitwerkingen 2^{e} ronde 2001

1. a) Bij elke wedstrijd in het toernooi worden 2 of 3 punten gescoord. Bij een toernooi van vier ploegen worden $\binom{4}{2}$, dus zes wedstrijden gespeeld, dus 12 tot 18 punten in totaal gescoord. Bij drie ploegen zijn het maximaal $\binom{3}{2}\times 3$ dus 9 punten. Bij vijf ploegen minimaal $\binom{5}{2}\times 2 = 20$.

b) Orden de teams A,B,C,D van hoog naar laag: dan heeft team D twee wedstrijden verloren en een gelijk gespeeld. Team C heeft geen wedstrijd verloren. Neem aan dat C alleen gelijk spel gespeeld heeft. Dan ziet de competitie-uitslag er uit zoals in schema 1.
Er blijven dan voor de twee resterende vakjes nog 3 punten te verdelen. Dan moet A gewonnen hebben van B en heeft team B in totaal 4 punten gehaald.
Als team C tweemaal gelijk spel gespeeld heeft en een keer gewonnen, dan zou C al 5 punten gescoord hebben, zie schema 2. B moet dan van A gewonnen hebben om boven C te eindigen en dat is strijdig met de rangorde (en ook met het totaal aantal behaalde punten.
Het antwoord is dus 4 punten voor B.

schema 1

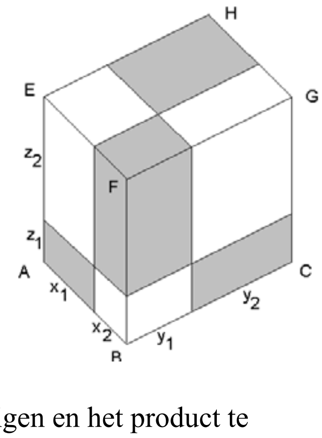
↲	A	B	C	D
A	$\times$		1	0
B		$\times$	1	0
C	1	1	$\times$	1
D	3	3	1	$\times$

schema 2

↲	A	B	C	D
A	$\times$	3	1	0
B	0	$\times$	3	0
C	1	0	$\times$	1
D	3	3	1	$\times$

2. $10 = f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) + 4 = 4f(1) + 6$ dus $f(1) = 1$.
Voor ieder getal n geldt: $f(n+1) - f(n) = f(n) + f(1) + n\times 1 - f(n) = n + 1$.
Dus $f(2001) = \{f(2001) - f(2000)\} + \{f(2000) - f(1999)\} + ... + \{f(2) - f(1)\} + f(1) =$
$2001 + 2000 + ... + 2 + 1 = 2001\times 2002/2 = 2003001$.

3. Noem de lengtes van de ribben van de grote balk x, y, z en de stukken waarin de ribben verdeeld worden door de drie snijvlakken x_1, x_2 en y_1, y_2 en z_1, z_2 met $x_1 + x_2 = x$ en $y_1 + y_2 = y$ en $z_1 + z_2 = z$. Dan geldt $x_1 y_1 z_1 = 9$, $x_2 y_2 z_1 = 12$, $x_2 y_1 z_2 = 8$ en $x_1 y_2 z_2 = 24$. Verder geldt:



$$\frac{x_1 y_1 z_1 \times x_2 y_2 z_1 \times x_2 y_1 z_2}{x_1 y_2 z_2} = x_2^2 y_1^2 z_1^2 \text{ dus } x_2^2 y_1^2 z_1^2 = \frac{9\times 12\times 8}{24} = 36,$$

dus $x_2 y_1 z_1 = 6$. Dus de inhoud van het deelblokje bij hoekpunt B is gelijk aan 6. Door telkens drie van de gegeven inhouden te vermenigvuldigen en het product te delen door de vierde inhoud vind je de kwadraten van de inhouden van de vier deelblokjes waarvan de inhoud niet gegeven is. Zo vind je voor de andere deelblokjes bij D, E en G resp. de inhouden 18, 12 en 16. Alle inhouden bij elkaar opgeteld leveren de inhoud van het hele blok: 105.

4. Voor gehele x zijn de teller en de noemer van de breuk beide gehele getallen. Als $f(x)$ geheel moet zijn, dan moet de noemer een deler van de teller zijn. Omdat x een deler van de noemer is en ook van een deel van de teller, namelijk van $2x^3 - 6x^2 + 13x$, moet x een deler zijn van 10. Dus hoeven we alleen de positieve delers van 10 te proberen en dat zijn 1,2,5 en 10 zelf. Invullen levert $f(5) = 35$ en $f(10) = 14$.

5. Verdeel de getallen in 3002 groepjes, namelijk de 3001 groepjes van twee getallen (1,2), (3,4), (5,6), ... , (6001,6002) en één groepje met één getal (6003). Als je uit deze 3002 groepjes er 1001 uitkiest dan heb je in totaal 2002 of 2001 getallen (2001 indien je het groepje (6003) bij de 1001 groepjes hebt gekozen). Als je de getallen uit de gekozen 1001 groepjes achter elkaar plaatst dan heb je een rij van 2002 (of 2001) getallen die afwisselend oneven, even, oneven, ... etc. zijn. Ze voldoen dan aan de gestelde eis. We laten zien dat je altijd 1001 groepjes kunt vinden binnen een deelverzameling van 4002 getallen.
Een deelverzameling van 4002 getallen pakken uit de verzameling 1,2,3,...,6003 betekent dat je 6003-4002=2001 getallen moet doorstrepen. Die 2001 getallen zitten in maximaal 2001 verschillende groepjes van de in totaal 3002 groepjes. Laat alle groepjes waarin minstens één doorgestreept getal zit buiten beschouwing, dan blijven er dus minimaal 3002-2001=1001 groepjes over waarin geen getal is doorgestreept. Die 1001 groepjes leveren een rij van minstens 2001 getallen op die aan de gestelde eis voldoet.

Dit was het veertigste jaar dat in Nederland een Wiskunde Olympiade werd gehouden!!