Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 18 september 2009
Technische Universiteit Eindhoven

Opgaven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Bij elke opgave is niet alleen het antwoord van belang; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer en een liniaal of geodriehoek. En natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel. Veel succes!

1. We bekijken in deze opgave positieve gehele getallen bestaande uit 5 cijfers, waarvan het eerste en het laatste cijfer niet nul zijn. We noemen zo'n getal een *palindroomproduct* als het aan de volgende twee voorwaarden voldoet:

- het getal is een palindroom (d.w.z. van links naar rechts gelezen hetzelfde als van rechts naar links gelezen);
- het getal is een product van twee positieve gehele getallen, waarvan het ene getal van links naar rechts gelezen gelijk is aan het andere getal van rechts naar links gelezen, zoals 4831 en 1384.

Zo is 20502 een palindroomproduct, want $102 \cdot 201 = 20502$ en 20502 is zelf een palindroom.
Bepaal alle palindroomproducten van 5 cijfers.

2. We bekijken de rij getallen $0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, \ldots$ die we maken door met 0 te beginnen, dan 1 erbij op te tellen en nog een keer 1 erbij op te tellen, dan 2 erbij op te tellen en nog een keer 2 erbij op te tellen, dan 3 erbij op te tellen en nog een keer 3 erbij op te tellen, enzovoorts. Als we de termen van deze rij a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$ noemen, dan geldt dus $a_0 = 0$ en

$$a_{2n-1} = a_{2n-2} + n, \qquad a_{2n} = a_{2n-1} + n$$

voor alle gehele getallen $n \geqslant 1$.
Vind alle gehele getallen $k \geqslant 0$ waarvoor a_k het kwadraat van een geheel getal is.

Let op: de overige opgaven staan op de achterkant!

3. Aan een tennistoernooi nemen minimaal drie spelers deel. Elke speler speelt precies één wedstrijd tegen elke andere speler en bovendien wint elke speler ten minste één wedstrijd van alle wedstrijden die hij speelt. (Er is bij een tenniswedstrijd altijd een winnaar en een verliezer, remise komt niet voor.)
Bewijs dat er drie spelers A, B en C zijn waarvoor geldt: A wint van B, B wint van C en C wint van A.

4. Gegeven is een willekeurige driehoek ABC. Op de middelloodlijn van AB ligt een punt P, binnen driehoek ABC. Op zijden BC en CA worden uitwendig driehoeken BQC en CRA gezet zodanig, dat $\triangle BPA \sim \triangle BQC \sim \triangle CRA$. (Dus Q en A liggen aan weerszijden van BC, en R en B liggen aan weerszijden van AC.)
Bewijs dat de punten P, Q, C en R een parallellogram vormen.

5. Honderd blanco kaarten worden genummerd: een kaart met op beide zijden het getal 1, een kaart met op beide zijden het getal 2, enzovoorts, tot en met een kaart met op beide zijden het getal 100. De kaarten worden geordend op een stapel gelegd, de kaart met het getal 1 boven.
De volgorde van de kaarten wordt telkens per stap als volgt veranderd: bij de 1$^{\text{e}}$ stap wordt de bovenste kaart omgedraaid en terug op de stapel gelegd (er verandert hierdoor natuurlijk niets), bij de 2$^{\text{e}}$ stap worden de bovenste 2 kaarten gepakt, omgedraaid en terug op de stapel gelegd, ..., bij de i^{e} stap worden de bovenste i kaarten gepakt, als stapeltje op hun kop gelegd en terug op de stapel gelegd, ..., bij de 100$^{\text{e}}$ stap worden alle 100 kaarten gepakt en als stapel op hun kop gelegd. Bij de 101$^{\text{e}}$ stap wordt weer alleen de bovenste kaart omgedraaid, bij de 102$^{\text{e}}$ stap de bovenste 2, enzovoorts.
Bewijs dat als we zo doorgaan, de kaarten na een aantal stappen weer op hun uitgangsposities terug zijn.