Nederlandse Wiskunde Olympiade
tweede ronde
vrijdag 15 september 2006
beschikbare tijd: 3 uur

Bij elke opgave is niet alleen het antwoord van belang, ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
Je mag geen rekenmachine gebruiken, geen formulekaart, alleen een pen, een passer en een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
Maak iedere opgave op een apart vel.

1. Een palindroom is een woord waarbij het niet uitmaakt of je het van links naar rechts of van rechts naar links leest. Voorbeelden: OMO, lepel en parterretrap.
Hoeveel palindromen kun je maken met de vijf letters a, b, c, d en e onder de voorwaarden:
- elke letter mag ten hoogste twee keer in elk palindroom voorkomen,
- de lengte van elk palindroom is ten minste 3 letters.
(Elke mogelijke combinatie van letters wordt als woord beschouwd.)

2. Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC. De lengten van de hoogtelijnen uit A, B en C zijn achtereenvolgens h_A , h_B en h_C . Binnen de driehoek ligt een punt P .
De afstand van P tot BC is $\frac{1}{3}h_A$ en de afstand van P tot AC is $\frac{1}{4}h_B$.
Druk de afstand van P tot AB uit in h_C .

3. $1+2+3+4+5+6=6+7+8$.
Wat is het kleinste getal k groter dan 6 waarvoor geldt:
$1+2+\cdots+k=k+(k+1)+\cdots+n$, met n een geheel getal groter dan k ?

4. Gegeven is driehoek ABC met een ingeschreven cirkel met middelpunt M en straal r.
De raaklijn aan deze cirkel die evenwijdig is met BC snijdt AC in D en AB in E.
De raaklijn aan deze cirkel die evenwijdig is met AC snijdt AB in F en BC in G.
De raaklijn aan deze cirkel die evenwijdig is met AB snijdt BC in H en AC in K.
Noem de middelpunten van de ingeschreven cirkels van driehoek AED, driehoek FBG en driehoek KHC achtereenvolgens M_A , M_B , M_C en de stralen achtereenvolgens r_A , r_B en r_C .
Bewijs: $r_A+r_B+r_C=r$.

5. Speler A en speler B spelen het volgende spel op een schaakbord van 8 bij 8 velden. Ze kleuren om de beurt een nog niet gekleurd veld. De ene speler gebruikt rood en de andere blauw. Speler A begint. Winnaar is degene die als eerste ergens op het bord de vier velden van een vierkantje van 2 bij 2 velden met zijn kleur heeft gekleurd.
Bewijs dat speler B altijd kan voorkomen dat speler A wint.