NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

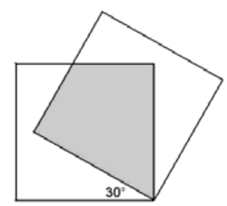
Tweede ronde
19 september 2003

Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade

Bij elke opgave is niet alleen het antwoord van belang, ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven. Verder moet je oplossing volledig zijn, zo moet je bijvoorbeeld bij vraag 1 en 3 laten zien dat je echt alle oplossingen gevonden hebt en dat er geen andere meer zijn.
Je mag geen rekenmachine gebruiken, geen formulekaart, alleen een pen, een passer en een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.

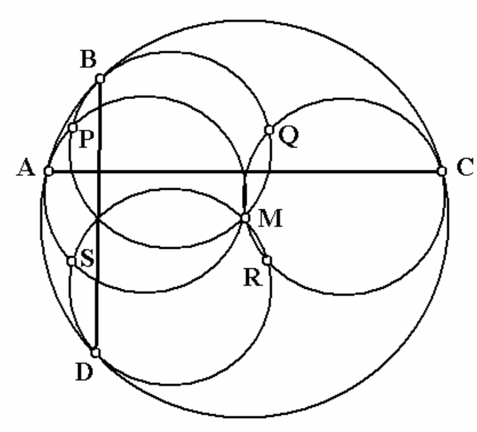
1. Een Pythagoreïsche driehoek is een rechthoekige driehoek waarvan de drie zijden gehele getallen zijn. Het bekendste voorbeeld is de driehoek met rechthoekszijden 3 en 4 en hypotenusa 5.
   Bepaal alle Pythagoreïsche driehoeken waarvan de oppervlakte gelijk is aan tweemaal de omtrek.

2. Twee vierkanten met zijde 12 liggen precies op elkaar. Het ene vierkant wordt om een hoekpunt over een hoek van 30 graden gedraaid t.o.v. het andere vierkant.
   Bepaal de oppervlakte van het gemeenschappelijke stuk van de twee vierkanten.



3. Bepaal alle positieve gehele getallen n die zowel te schrijven zijn als het product van twee opeenvolgende gehele getallen als het product van vier opeenvolgende gehele getallen.
   In formule: $n = a(a+1) = b(b+1)(b+2)(b+3)$.

4. In een cirkel met middelpunt M snijden twee koorden AC en BD elkaar loodrecht.
   De cirkel met middellijn AM snijdt de cirkel met middellijn BM behalve in M ook nog in punt P.
   De cirkel met middellijn BM snijdt de cirkel met middellijn CM behalve in M ook nog in punt Q.
   De cirkel met middellijn CM snijdt de cirkel met middellijn DM behalve in M ook nog in punt R.
   De cirkel met middellijn DM snijdt de cirkel met middellijn AM behalve in M ook nog in punt S.
   Bewijs dat vierhoek $PQRS$ een rechthoek is.



5. Op een tafel ligt een aantal kaarten. Op elke kaart is een getal geschreven. De operatie "pak en vervang" houdt het volgende in: twee willekeurige kaarten worden van de tafel gepakt en vervangen door één nieuwe kaart. Als op de twee gepakte kaarten de getallen a en b staan, dan wordt op de nieuwe kaart het getal $a + b + ab$ gezet.
   Als we beginnen met tien kaarten waarop respectievelijk de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10 staan, welke waarde(n) kan het getal dan hebben dat na negen keer "pak en vervang" op de enige kaart staat die nog op tafel ligt? Bewijs je antwoord.