Figuur 1

1. 1962

(1) (a) Analyse: Noem het raakpunt van de lijn door A met de cirkel D, en het raakpunt van de lijn door B met de cirkel E, dus $DC = CE$ en $\angle DCE = 180°$ (zie figuur 1).
Daar $\angle C = 90°$ geldt:

$$S_{BC} \circ S_{AC}(D) = R_{C,180°}(D) = E, \text{ dus}$$
$$S_{AC}(D) = S_{BC}(E) = H$$

met $\angle CHA = \angle CDA = 90°$ en $\angle CHB = \angle CEB = 90°$, dus H ligt op AB en is het voetpunt van de hoogtelijn uit C.
Constructie: Construeer de hoogtelijn uit C met voetpunt H en teken de cirkel met middelpunt C en straal $r = CH$.

(b) Wegens $\triangle AHC \sim \triangle ACB$ geldt:

$$\frac{CH}{AC} = \frac{BC}{AB} \text{ dus } r = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2) Voor alle $n \geq 1$ is n te schrijven als:

$$n = 6k + p, \text{ met } k \in \{0, 1, 2, \ldots\} \text{ en } p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Dan is $t_n = l + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{1}{4}$, met l geheel. Daar $T_{6k+p} - t_{6k+p} = T_p - t_p$ voor $p \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ geldt: $T_n - t_n$ is het getal dat $\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{1}{4}$ aanvult tot een geheel getal, en voor $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ respectievelijk is $T_n - t_n$ gelijk aan: $\frac{11}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}$.

$$\sum_{n=1}^{1014}(T_n - t_n) = \frac{1014}{6}\sum_{n=1}^{6}(T_n - t_n) = 169 \cdot 3 = 507$$

(3) De getallen u_{n+2} vallen uiteen in twee groepen:

groep 1: de getallen die eindigen op een 7;
groep 2: de getallen die niet eindigen op een 7.
Getallen uit groep 1 zien er als volgt uit:

$$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{n}\star\star$$

waarbij op plaats $\star\star$ mag staan: 07,17,27,37,47,57,67,87,97, dus dat zijn er $9 \cdot u_n$ in groep 1.
Getallen uit groep 2 zien er als volgt uit:

$$\underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{n+1}\star$$

waarbij op plaats $\star$ mag staan: 0,1,2,3,4,5,6,8,9, dus dat zijn er $9 \cdot u_{n+1}$ in groep 2.
Dus geldt: $u_{n+2} = 9(u_{n+1} + u_n)$.

(4) (a) Het achterste cijfer van n is het cijfer achter de komma van $\frac{n}{10}$, dus gelijk aan:

$$10(\frac{n}{10} - [\frac{n}{10}]) = n - 10[\frac{n}{10}]$$

(b) Het op één na achterste cijfer van n is het cijfer achter de komma van $\frac{1}{10}[\frac{n}{10}]$, en dus gelijk aan:

$$10(\frac{1}{10}[\frac{n}{10}] - [\frac{[\frac{n}{10}]}{10}]) = [\frac{n}{10}] - 10[\frac{n}{100}]$$

(c) Noem het aantal cijfers van n: m.
Het voorste cijfer van n is dan:

$$[\frac{n}{10^{m-1}}] \quad \text{met} \quad 10^{m-1} \leq n < 10^m$$
$$\text{dus} \quad m - 1 = [\log n]$$

met 10 het grondtal van de logaritme.
Het voorste cijfer is dus:

$$[\frac{n}{10^{[\log n]}}] = [10^{\log n - [\log n]}]$$

(5) Bij elkaar horen noteren we als $\sim$.
Noem de drie balken b_1, b_2, b_3. Dan is $b_1 \sim b_2, b_2 \sim b_3, b_3 \sim b_1$.
Daar $b_1 \sim b_2$ geldt voor zekere noot n_3: $n_3 \sim b_1$ en $n_3 \sim b_2$ (axioma (c)).
Zo zijn er ook, weer volgens axioma (c), noten n_1 en n_2
met: $n_1 \sim b_2$ en $n_1 \sim b_3$, en : $n_2 \sim b_3$ en $n_2 \sim b_1$.
Deze drie noten zijn verschillend, want de veronderstelling $n_1 = n_2$ leidt tot $n_1 \sim b_1, n_1 \sim b_2$ en $n_1 \sim b_3$, een tegenspraak.
Volgens axioma (d) bestaat er bij b_1 en n_1 een vel v met $v \sim b_1$ en $v \sim n_1$.
Voor n_3 geldt: $n_3 \sim b_1$; tevens is $v \sim b_1$, dus geldt $n_3 \sim v$, volgens axioma (a).
Nu geldt dat b_2 en v zowel bij n_1 als n_3 horen, dus dat $b_2 \sim v$, volgens axioma (b).
Op analoge wijze vinden we $b_3 \sim v$.
Conclusie: $b_1 \sim v, b_2 \sim v$ en $b_3 \sim v$.