Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 26 maart 2010

Uitwerkingen

B-opgaven

B1. Van de tien uitkomsten $32, 36, 37, \ldots, 48, 51$ is $d+e$ de grootste en $c+e$ de op een na grootste. Er moet dus gelden dat $d+e=51$ en $c+e=48$. Verder is $a+b$ de kleinste uitkomst en $a+c$ de op een na kleinste, zodat $a+b=32$ en $a+c=36$.
De op twee na kleinste uitkomst kan zowel $a+d$ als $b+c$ zijn. We weten echter dat

$$a+d=(a+c)+(d+e)-(c+e)=36+51-48=39.$$

Blijkbaar is $a+d$ niet de op twee na kleinste uitkomst. Maar dan moet gelden dat $b+c=37$.
Combineren van de gevonden uitkomsten geeft

$$2e=2(c+e)-(a+c)-(b+c)+(a+b)=2\cdot 48-36-37+32=55.$$

Het antwoord is dus $e=\frac{55}{2}$.

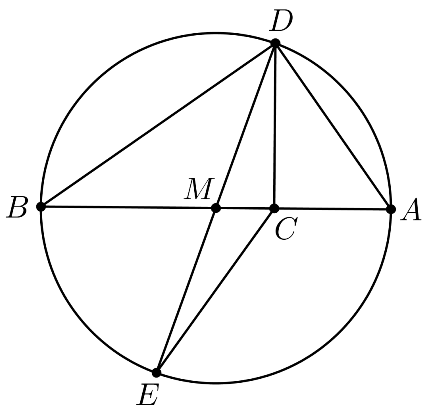
B2. Noem het middelpunt van de cirkel M. Driehoeken CDM en CEM hebben gelijke oppervlakte. Immers, de twee driehoeken hebben bases van gelijke lengte $|DM|=|EM|$ en gelijke hoogte. Er volgt dat

$$O(CDE)=2\cdot O(CDM).$$

Er geldt $|AC|=\frac{1}{3}|AB|$ en $|AM|=\frac{1}{2}|AB|$, zodat $|CM|=|AM|-|AC|=\frac{1}{2}|AB|-\frac{1}{3}|AB|=\frac{1}{6}|AB|$. Driehoeken ABD en CDM hebben ten opzichte van de bases AB en CM dezelfde hoogte en er geldt dus dat

$$O(ABD)=6\cdot O(CDM).$$

Combinatie van de twee gevonden vergelijkingen geeft $\frac{O(ABD)}{O(CDE)}=\frac{6}{2}=3$.



B3. Noem het totale aantal mogelijke standen van de klok S (voor deze opgave is het niet nodig S expliciet uit te rekenen). Als we voor iedere mogelijke stand alleen het laatste cijfer van de stand zouden opschrijven, dan zouden we elk van de cijfers $\frac{1}{10}S$ maal opschrijven. De totale som van die laatste cijfers is dus $\frac{1}{10}S\,(0+1+2+\ldots+9) = \frac{45}{10}S = \frac{9}{2}S$.
Als we ditzelfde zouden doen voor het op een na laatste cijfer, dan zouden we alleen de cijfers 0 tot en met 5 opschrijven, elk precies $\frac{1}{6}S$ keer. De totale som van die cijfers is dan $\frac{1}{6}S\,(0+1+\ldots+5) = \frac{15}{6}S = \frac{5}{2}S$.
Op geheel analoge wijze is de som van de cijfers in de minutenposities gelijk aan $\frac{9}{2}S + \frac{5}{2}S$.
Bij de eerste twee cijfers, die de uren aangeven, moeten we beter opletten aangezien niet elk cijfer even vaak voorkomt. Wel geldt dat elk van de cijferparen $00, 01, \ldots, 23$ even vaak voor komt: $\frac{1}{24}S$ keer. De totale som van de eerste twee cijfers is dan gelijk aan

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{24}S\,((0+0)+(0+1)+(0+2)+\ldots+(2+3))\\
=&\tfrac{1}{24}S\,((0+1+\ldots+9)+10\cdot 1+(0+1+\ldots+9)+4\cdot 2+(0+1+2+3))\\
=&\tfrac{114}{24}S = \tfrac{19}{4}S.
\end{aligned}$$

De totale som van alle cijfers van alle mogelijke standen is nu $2\cdot\frac{9}{2}S + 2\cdot\frac{5}{2}S + \frac{19}{4}S = \frac{75}{4}S$. Het gemiddelde is het totaal gedeeld door het aantal, S, en dat is dus gelijk aan $\frac{75}{4}$ $(= 18\frac{3}{4})$.

B4. Met een klein beetje rekenwerk vinden we wat meer getallen uit de rij:

$$\begin{array}{l}
0,\quad 1,\quad 2,\quad 2,\quad 1,\quad -1,\quad -2,\quad -1,\quad 1,\quad 3,\quad 4,\quad 3,\quad 0,\quad -3,\quad -3,\\
0,\quad 3,\quad 6,\quad 6,\quad 3,\quad -3,\quad \ldots
\end{array}$$

We zien een duidelijk patroon: na vijftien termen herhaalt de rij zich, alleen dan met alle termen driemaal zo groot. Dat de rij dit patroon inderdaad blijft volgen, kun je als volgt inzien. Elk getal in de rij wordt bepaald door zijn drie voorgangers. Stel nu dat drie opeenvolgende getallen uit de rij a, b, c zich vijftien posities verder herhalen, maar dan vermenigvuldigd met een factor 3:

$$\ldots, a, b, c, d, \ldots, 3a, 3b, 3c, \ldots$$

Het getal dat volgt na $3a, 3b, 3c$ is (per definitie) gelijk aan $3c$ min de kleinste van $3a$ en $3b$. Dat is precies driemaal zoveel als: c min de kleinste van a en b. Oftewel: dat is precies driemaal zoveel als d. Als drie opeenvolgende getallen uit de rij zich vijftien posities verder herhalen (met een factor 3), geldt dit dus automatisch ook voor het volgende getal, en daarmee ook voor het getal daarna, etcetera.
Met de gevonden regelmaat zien we dat het honderdste getal gelijk is aan het tiende getal (3), maar dan $\frac{90}{15} = 6$ keer vermenigvuldigd met 3. Dat levert op: $3 \cdot 3^6 = 2187$.

B5. De uitkomsten die Raymond kan krijgen, corresponderen precies met de termen in de uitwerking van het product $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)$.
De totale som is dan natuurlijk

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\left(1+\tfrac{1}{5}\right)\left(1+\tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{7}{6} = \tfrac{7}{2}.$$

C-opgaven

C1. Stel dat n een geheel getal van vier cijfers is. We schrijven $n = 1000a + 100b + 10c + d$, waarbij a, b, c en d de cijfers van n zijn. Er geldt dus $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 9$ en omdat een getal nooit met een nul begint ook $a > 0$.
Nu willen we weten voor welke n er geldt dat $n+(a+b+c+d) = 1001a+101b+11c+2d = 2010$. Omdat $1001 \cdot 3$ al groter is dan 2010, moet er gelden dat $a < 3$ en dus $a = 1$ of $a = 2$. We proberen beide gevallen.

1. Als $a = 1$, dan moet gelden dat $101b + 11c + 2d = 2010 - 1001 \cdot 1 = 1009$. We gaan nu de mogelijke waarden voor b bepalen.
   Er geldt dat $0 \leqslant 11c + 2d \leqslant 13 \cdot 9 = 117$. Omdat $101b = 1009 - (11c + 2d)$ volgt hieruit ook dat $1009 \geqslant 101b \geqslant 1009 - 117 = 892$. We zoeken dus de 101-vouden tussen 892 en 1009, omdat $101b$ een 101-voud is. Het enige 101-voud tussen 892 en 1009 is 909 en er moet gelden dat $b = 9$.
   Nu moet gelden dat $11c+2d = 1009-909 = 100$. Nu gaan we de mogelijke waarden voor c bepalen.
   Er geldt dat $0 \leqslant 2d \leqslant 2 \cdot 9 = 18$. Omdat $11c = 100 - 2d$ volgt hieruit ook dat $100 \geqslant 11c \geqslant 100 - 18 = 82$. Aangezien $11c = 100 - 2d$ even moet zijn, moet $11c$ gelijk zijn aan een even 11-voud tussen 82 en 100. Het enige even 11-voud tussen 82 en 100 is 88. Er moet dus gelden dat $c = 8$ en $d = 6$.
   Als mogelijke oplossing vinden we dan $n = 1986$.
2. Als $a = 2$, dan moet gelden dat $101b + 11c + 2d = 2010 - 1001 \cdot 2 = 8$.
   We zien direct dat hieruit moet volgen dat $b = c = 0$ en dus $d = 4$.
   Als mogelijke oplossing vinden we $n = 2004$.

Nu controleren we of de oplossingen 1986 en 2004 ook daadwerkelijk aan de beginvoorwaarden voldoen. Er geldt inderdaad dat $1986 + 1 + 9 + 8 + 6 = 2010$ en $2004 + 2 + 0 + 0 + 4 = 2010$.
Dus zijn $n = 1986$ en $n = 2004$ de enige twee oplossingen. $\square$

C2. Het midden van BC noemen we D en het midden van AX noemen we M. Aangezien $|AM| = |MX|$, $|AC| = |CX|$ en $|MC| = |MC|$, zijn driehoeken AMC en XMC congruent (ZZZ). Hieruit volgt dat $\angle CMA = \angle CMX$. Omdat $\angle CMA + \angle CMX = 180°$ volgt daar weer uit dat $\angle CMA = \angle CMX = 90°$.
Op precies dezelfde manier geldt dat driehoeken CDY en BDY congruent zijn. Hieruit volgt dat $\angle CDY = \angle BDY = 90°$.
Er geldt dat $\frac{|CD|}{|AM|} = \frac{|CY|}{|AC|} = \frac{1}{2}$. Samen met het gegeven dat $\angle AMC = \angle CDY = 90°$ volgt daaruit dat driehoeken AMC en CDY gelijkvormig zijn (zzr).
Nu weten we dat $\angle ACM = \angle CYD$ en dus dat $\angle ACM + \angle DCY = \angle CYD + \angle DCY = 180° - \angle CDY = 90°$. Hieruit volgt weer dat $\angle MCY = 180° - \angle ACM - \angle DCY = 90°$.
Trek de lijn door Y, die loodrecht op AX staat. Het snijpunt van deze lijn met AX noemen we F. We zien direct dat $MCYF$ een rechthoek is.
Met de stelling van Pythagoras vinden we dat $|MC|^2 = |XC|^2 - |MX|^2 = 6^2 - 4^2 = 20$. Verder geldt dat $|XF| = |MX| - |MF| = |MX| - |CY| = 1$ en $|FY| = |MC|$. Nogmaals de stelling van Pythagoras geeft $|XY|^2 = |FY|^2 + |FX|^2 = |MC|^2 + 1 = 21$ en dus $|XY| = \sqrt{21}$. □