Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 26 maart 2010

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

Bij de B-opgaven is het antwoord steeds een getal, dat je op het antwoordformulier moet invullen. Een goed antwoord levert 4 punten op, een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is. LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of 5^8 of $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+\pi)$.

B1. Alice heeft vijf reële getallen $a < b < c < d < e$. Hiervan telt ze elk tweetal getallen bij elkaar op en noteert de tien uitkomsten. De drie kleinste uitkomsten blijken 32, 36 en 37 te zijn, terwijl de twee grootste uitkomsten 48 en 51 zijn. Bepaal e.

B2. Bekijk een cirkel met middellijn AB. Punt C ligt op het lijnstuk AB zodanig dat $2 \cdot |AC| = |BC|$. De punten D en E liggen op de cirkel zodat CD loodrecht op AB staat en DE ook een middellijn van de cirkel is. Noteer de oppervlaktes van driehoeken ABD en CDE als $O(ABD)$ en $O(CDE)$. Bepaal de waarde van $\frac{O(ABD)}{O(CDE)}$.

B3. Een digitale klok geeft in de loop van een dag de tijden 00:00:00 t/m 23:59:59 aan. Iedere seconde van de dag kun je de cijfers optellen en zo ontstaat er steeds een geheel getal. Om 13:07:14 is die som bijvoorbeeld $1+3+0+7+1+4=16$. Wanneer je zo voor iedere mogelijke stand van de klok de som opschrijft en daarna van al deze getallen het gemiddelde neemt, wat is dan de uitkomst?

B4. De oneindige rij getallen

$$0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1, -1, -2, -1,\ 1,\ 3,\ \ldots$$

voldoet aan de volgende regel. Voor elk viertal opeenvolgende getallen $\ldots, a, b, c, d, \ldots$ uit de rij geldt steeds dat d gelijk is aan c min het kleinste van de twee getallen a en b. Zo is het negende getal uit de rij gelijk aan $-1-(-2)=1$ en het tiende getal gelijk aan $1-(-2)=3$. Bereken het 100-ste getal uit de rij.

B5. Raymond heeft vijf muntjes. Op de kopzijde van elke munt staat het getal 1. Op de muntzijde staan respectievelijk de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{6}$. Omdat elke munt ofwel met kop ofwel met munt boven ligt, zijn er 32 manieren om de vijf muntjes op tafel te leggen. Voor elk van deze 32 manieren vermenigvuldigt Raymond de vijf getallen die boven liggen met elkaar en schrijft hij het resultaat op.
Als Raymond ten slotte deze 32 getallen bij elkaar optelt, wat is dan de uitkomst?

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op.
Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. Bepaal alle positieve gehele getallen n van vier cijfers waarvoor geldt dat n plus de som van de cijfers van n gelijk is aan 2010.

C2. Op lijnstuk AB met lengte 10 ligt punt C zodat $|AC| = 6$ en $|CB| = 4$. Twee punten X en Y liggen aan dezelfde kant van lijn AB, zodat $|YB| = |YC| = 3$, $|XA| = 8$ en $|XC| = 6$. Bepaal de lengte van lijnstuk XY.