Toelichting op de werkwijzer

Birgit van Dalen, Quintijn Puite

De opgaven voor de training komen uit het boekje "De Nederlandse Wiskunde Olympiade — 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden." Het zijn oude eersterondeopgaven. De leerlingen moeten hier over het algemeen echt even op puzzelen. Behalve de genoemde voorkennis is er vooral veel creativiteit voor nodig. Per bijeenkomst (ca. twee lesuren) zijn er vijf opgaven gepland, maar als de leerlingen er één of twee oplossen, is dat al een mooie prestatie.

Hieronder vindt u schetsmatige uitwerkingen van de opgaven uit de werkwijzer, die aansluiten op de hints uit het boekje.

Week 1

Opgave 1.
Uitgewerkt op blz. 9.

Opgave 18.
Uitgewerkt op blz. 21.

Opgave 2.
De grootste cirkel die nog past, zit linksonderin of rechtsbovenin. Teken hem even linksonderin. Teken een lijn vanaf het middelpunt van deze cirkel naar het hoekpunt linksboven. Als de gevraagde straal r is, dan is dit lijnstuk $1 + r$. Dit leidt tot de vergelijking $(1 + r)^2 = r^2 + (2 - r)^2$. De grootste oplossing vervalt omdat $r < 1$. Antwoord: $3 - \sqrt{6}$.

Opgave 3.
Noem M het midden van AB. Dan is M het beeld van D onder spiegeling in PQ. Dus PQ is de middelloodlijn van DM. In het bijzonder staan PQ en DM loodrecht op elkaar. Als we DM een kwartslag draaien om D, wordt hij evenwijdig aan PQ en duidelijk ook even lang. Antwoord: $4\sqrt{5}$.

Opgave 5.
Na spiegelen krijgen we $|AB_1| = 5\sqrt{6}$ en $|AB_2| = 6\sqrt{5}$. Noem x de gevraagde afstand. Met twee keer Pythagoras vinden we $150 - (x - 1)^2 = 180 - (x + 1)^2$. Antwoord: $7\frac{1}{2}$.

Week 2

Opgave 6.
Uitgewerkt op blz. 11.

Opgave 9.
Het aantal cijfers dat je overhoudt in de rij is $9 + 51 \cdot 2 = 111$, dus je moet 11 cijfers overhouden. Om dit getal zo groot mogelijk te maken, willen we beginnen met zoveel mogelijk negens. Maar alle zes de negens kiezen kan niet, omdat na de zesde negen nog slechts twee cijfers staan. Vijf negens en daarna een acht kan om dezelfde reden ook niet. Vijf negens en daarna een zeven kan wel. Antwoord: 99999785960.

Opgave 10.
Als $M = 100a + 10b + c$, dan is de genoemde som $(2a + 2b + 2c) \cdot 111$. Dus $a + b + c = 13$. Antwoord: 931.

Opgave 12.
Er geldt

$$n = (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots + (10^{100} - 1) = \underbrace{111 \cdots 111}_{\text{99 enen}}00 - 99 = \underbrace{111 \cdots 11}_{\text{98 enen}}001.$$

Antwoord: 99.

Opgave 28.
De gemeenschappelijke deler (noem hem d) moet ook een deler zijn van het tweede getal min tien keer het eerste getal; dat is $63ab3 - 25ab0 = 38003$. Ook is het een deler van $44ab76 - 25ab00 = 190076$. Dus d is een deler van $190076 - 5 \cdot 38003 = 61$. Dit is een priemgetal, dus moet het gelijk zijn aan d, dat twee cijfers had. Antwoord: 61.

Week 3

Opgave 13.
Uitgewerkt op blz. 13. Om de oppervlakte van $\triangle BFE$ te maximaliseren, kies BF als basis. Dan is de hoogte maximaal als $\angle BFE$ recht is.

Opgave 14.
Noem de hoogte van de driehoek h, van een rechthoek y en noem $c = |AB|$. Het driehoekje bovenop de rechthoek heeft hoogte $h-y$ en dus basis $\frac{h-y}{h}c$. De oppervlakte van de rechthoek is dus $y \cdot \frac{h-y}{h}c = \frac{c}{h} \cdot y(h-y)$. Dit is maximaal als $y = \frac{1}{2}h$. De zijden van de grootste rechthoek zijn dus $\frac{1}{2}h$ en $\frac{1}{2}c$. De oppervlakte hiervan is $\frac{1}{4}hc = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}hc)$, dus de driehoek heeft twee keer zo grote oppervlakte als de rechthoek. Antwoord: 24.

Opgave 16.
De zwaartelijnen delen elkaar in stukjes van 6 en 3, en 8 en 4. Trek ook de derde zwaartelijn. De driehoek is nu in zes kleine driehoekjes verdeeld die twee aan twee even groot zijn (en zelfs allemaal, maar dat hebben we niet nodig). Van drie rechthoekige driehoeken kunnen we makkelijk de oppervlakte berekenen. Zo volgt ook de oppervlakte van de twee kleine driehoekjes die we nog niet wisten (bij hoekpunt B). Antwoord: 72.

Opgave 62.
Leg B op Q en C halverwege QR, zodat A op het verlengde van PQ ligt. Blaas nu driehoek ABC op vanuit punt B met factor 2 naar een driehoek $A'BC'$ en noem D' het beeld van D. Nu is BD' de middenparallel van driehoek $PA'R$ evenwijdig aan zijde PR, dus $|BD| = \frac{1}{2}|BD'| = \frac{1}{4}|PR| = 3$. Antwoord: 3.

Opgave 64.
De zwaartelijn vanuit A delen we op in lengtes y en $2y$; de zwaartelijn vanuit B in x en $2x$. Dit leidt tot $(2x)^2 + y^2 = (\frac{11}{2})^2$ en $x^2 + (2y)^2 = (\frac{7}{2})^2$. Optellen en vermenigvuldigen met 4 geeft $20x^2 + 20y^2 = 170$, dus $4x^2 + 4y^2 = 34$. Antwoord: $\sqrt{34}$.

Week 4

Opgave 24.
Uitgewerkt op blz. 23. Merk op dat n ook een deler moet zijn van $259 - 222 = 37$.

Opgave 25.
De priemontbindingen van 30 en 72 zijn $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ en $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Nu moet N de priemfactoren van 30 bevatten die niet al in 72 zitten; dat is alleen een factor 5. Verder moet N de priemfactoren van 72 bevatten die niet al in 30 zitten; dat zijn $2^2 \cdot 3$. Antwoord: 60.

Opgave 26.
Naast een 1 mag geen 3 of 5 staan, want dan is de som even. Er mag ook geen 2 staan, want dan is de som deelbaar door 3. Dus naast een 1 staat een 4 of een 6. Dit kunnen we voor alle cijfers uitzoeken. Bij elk begincijfer blijken er precies twee mogelijkheden te zijn voor de rest van het getal. Antwoord: 12.

Opgave 30.
Tussen k opeenvolgende k-vouden zit in elk geval een k^2-voud. Dus het getal moet zeker deelbaar zijn door 2^2, 3^2, $\dots$, 10^2. Door naar de priemfactoren te kijken, zien we dat het deelbaar moet zijn door 2^6, 3^4, 5^2 en 7^2. Als het hierdoor deelbaar is, voldoet het ook. Antwoord: $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

Opgave 34.
Het getal N moet in elk geval de priemfactoren 2 en 3 bevatten. Het aantal priemfactoren 3 moet deelbaar zijn door 4 en het moet 1 meer zijn dan een drievoud. Kleinste mogelijkheid: 4. Het aantal priemfactoren 2 moet deelbaar zijn door 3 en het moet 2 meer zijn dan een viervoud. Kleinste mogelijkheid: 6. Antwoord: $2^6 \cdot 3^4 = 5184$.

Week 5

Opgave 19.
De rechte stukken zijn steeds twee keer de lengte van de straal, dus 2. De gebogen stukken vormen samen precies de omtrek van één cirkel. Antwoord: $12 + 2\pi$.

Opgave 20.
Laat het driehoekje precies 1 zakken. Dan staat hij op de bodem van het vierkant. De top van dit driehoekje heeft nu afstand 1 tot de onderste hoekpunten van het vierkant en tot de bovenkant van de cirkel, dus dit is het gezochte middelpunt. Antwoord: 1. (Alternatief is om Pythagoras toe te passen. Je krijgt $r^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - r)^2$ en daar volgt $r = 1$ uit.)

Opgave 21.
Het vierkant met als hoekpunten de snijpunten van de kleine cirkels heeft oppervlakte 4. Als we daar twee halve cirkels (samen oppervlakte π) van afhalen, houden we twee V-vormige lichtblauwe stukjes over die dus samen oppervlakte $4 - \pi$ hebben. De oppervlakte van al het lichtblauw is dus $2 \cdot (4 - \pi) + 4 \cdot \frac{1}{2}\pi = 8$. Antwoord: $4\pi - 8$. (Ook andere manieren van plakken en knippen zijn mogelijk.)

Opgave 45.
Uitgewerkt op blz. 33.

Opgave 47.
Kies de lengte van de zijde van de zeshoek 1 en splits de zeshoek in zes gelijkzijdige driehoekjes. Dan is $|BD| = \sqrt{3}$, dus $|QR| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Verder is $|DE| = 1$ en $|CF| = 2$, dus $|RS| = \frac{3}{2}$. Nu is de oppervlakte van $PQRS$ gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$. De oppervlakte van $ABCD$ is $1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Antwoord: $4 : 3$. (Merk op dat de rechthoeken gelijkvormig zijn met factor $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.) (Alternatief: knippen en plakken met de zes gelijkzijdige driehoekjes. Dan blijkt $ABCD$ te bestaan uit 4 driehoekjes en $PQRS$ uit $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$ driehoekjes.)

Week 6

Opgave 32.
Uitgewerkt op blz. 25.

Opgave 38.
Noem a de leeftijd van de lerares, b de leeftijd van haar echtgenoot, c de som van de leeftijden van haar kinderen op 20 maart 1990. Noem n het aantal kinderen. Dan geldt $ab + c = 1545$ en $(a+1)(b+1) + c + n = 1627$. Hieruit volgt $a + b + 1 + n = 82$. Dus $(a+2)(b+2) + c + 2n = 1545 + (2a + 2b + 4 + 2n) = 1545 + 2(a + b + 1 + n) + 2 = 1545 + 2 \cdot 82 + 2 = 1711$. Antwoord: 1711.

Opgave 36.
Harm kan niet meer wisselen als hij nog maar twee muntjes van 20 cent en geen muntjes van 50 cent over heeft. Stel dat hij daarvoor a keer heeft gedaan: $3 \times 20 \to 1 \times 50$; en b keer: $1 \times 50 \to 2 \times 20$. Dan geldt $94 - 3a + 2b = 2$ en $19 + a - b = 0$. Hieruit volgt $a = 130$ en $b = 149$. Antwoord: 539.

Opgave 35.
Zij g de groeifactor per jaar. Dan is $gB - B = 72$ en $g^3B - gB = 182$. Dus $\frac{182}{72} = \frac{g^3-g}{g-1} = g(g+1)$. Dit is een kwadratische vergelijking in g met één positieve oplossing, namelijk $g = \frac{7}{6}$. Nu berekenen we gemakkelijk B uit $gB - B = 72$. Antwoord: 432.

Opgave 44.
Noem het eerste getal a en het tweede getal b. De eerste twaalf getallen in de rij zijn a, b, $b-a$, $-a$, $-b$, $a-b$, a, b, $b-a$, $-a$, $-b$, $a-b$. De rij herhaalt zich dus na elke zes termen. Elke zes opeenvolgende termen hebben bovendien som 0. De som van de eerste 16 getallen is dus gelijk aan de som van de eerste 4 getallen en dat is $2b - a$. De som van de laatste 20 getallen is gelijk aan de som van de laatste 2 getallen. De rij eindigt op $\ldots$, a, b, $b-a$, $-a$, dus deze som is $b - 2a$. We weten nu $2b - a = 18$ en $b - 2a = 24$. Hieruit volgt $a = -10$. Antwoord: -10.

Week 7

Opgave 40.
De som van alle oneven startnummers is $1 + 3 + 5 + \cdots 97 = \frac{1}{2} \cdot 98 \cdot 49 = 49^2$. De som van alle even startnummer is $2 + 4 + 6 + \cdots + 96 = \frac{1}{2} \cdot 98 \cdot 48 = 48 \cdot 49$. De loper heeft dus een oneven startnummer en wel $49^2 - 48 \cdot 49 = 1 \cdot 49$. Antwoord: 49.

Opgave 41.
De eerste tien getallen in de rij zijn 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11. De rij gaat zich dus herhalen. Het 1999e getal is dus gelijk aan het 7e getal (want 1992 is deelbaar door 3). Antwoord: 11.

Opgave 42.
De eerste tien getallen in de rij $(a_0, \ldots, a_9)$ zijn 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8. We zien een patroon: voor even n geldt $a_n = n + 1$ en voor oneven n geldt $a_n = n - 1$. (Het is duidelijk dat dit voor alle n moet gelden: voor even n geldt: $a_n + a_{n-1} = (n + 1) + (n - 2) = 2n - 1$, en voor oneven n geldt: $a_n + a_{n-1} = (n - 1) + n = 2n - 1$.) Antwoord: 1992.

Opgave 52.
We kijken naar de getallen op de diagonaal: 1, 3, 7, 13, 21, ... Hiervan moeten we het 25e getal hebben. Het patroon is: +2, +4, +6, ... Dus het verschil tussen het 25e getal en het eerste getal is $2 + 4 + 6 + \cdots + 48 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 24 = 600$. Antwoord: 601.

Opgave 43.
De eerste zestien getallen in de rij $(f(1), \ldots, f(16))$ zijn 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5. We zien een patroon: $f(3k - 1) = k$, $f(3k) = k + 1$ en $f(3k + 1) = k$ voor alle k. (Invullen laat (net als bij de vorige opgave) zien dat dit voldoet.) Er geldt $1990 = 3 \cdot 663 + 1$. Antwoord: 663.

Week 8

Opgave 81.
We zetten één persoon alvast op een stoel; dat maakt niet uit. Daarna zijn er nog 8 mogelijkheden voor de persoon rechts naast hem, 7 voor de persoon daar weer rechts naast, enzovoorts. Maar we kunnen ook de hele tafel juist linksom vullen en dat telt als dezelfde tafelschikking. Antwoord: $\frac{1}{2}8! = 20160$.

Opgave 7.
Alle cijfers in een klimgetal zijn verschillend. Voor elk van de cijfers 1 tot en met 9 kunnen we kiezen of ze wel of niet in het getal komen. Met de gekozen cijfers kunnen we precies één klimgetal maken. We kunnen de cijfers op $2^9 = 512$ manieren kiezen, maar als we nul of één cijfer kiezen, krijgen we geen goed getal. Antwoord: 502.

Opgave 59.
Teken een Venn-diagram met een cirkel voor de mensen die A hoger waarderen dan B en een cirkel voor de mensen die B hoger waarderen dan C. Samen bevatten deze cirkels hoogstens 100 personen, dus in de doorsnede zitten minstens 43 personen. Bij deze 43 personen wordt A hoger gewaardeerd dan C, maar bij alle anderen hoeft dat niet. Antwoord: 57.

Opgave 82.
Teken een Venn-diagram. Bereken eerst het aantal mensen dat alleen Frans spreekt ($350 - 305 = 45$). Dan het aantal mensen dat alleen Engels spreekt ($125 - 45 = 80$). Dan het aantal mensen dat behalve Engels nog een taal spreekt ($305 - 80 = 225$). Er zijn 150 mensen die in elk geval Nederlands en Engels spreken en $157 - 45 = 112$ mensen die in elk geval Frans en Engels spreken, dus $150 + 112 - 225 = 37$ mensen spreken alledrie de talen. Antwoord: 37.

Opgave 61.
Uitgewerkt op blz. 43.