De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2006 – 2008

een bundel met opgaven en uitgebreide uitwerkingen

Floris van Doorn

Alexander van Hoorn

Maarten Roelofsma

Inhoudsopgave

Auteurs: Floris van Doorn, Alexander van Hoorn, Maarten Roelofsma
Eindredactie: Birgit van Dalen, Quintijn Puite

Deze uitgave is mede mogelijk gemaakt door Centrum Wiskunde & Informatica

---

Floris, Alexander en Maarten zaten alledrie in het team dat in de zomer van 2008 Nederland vertegenwoordigde bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Madrid. Zij hebben dit boekje speciaal geschreven voor jongere leerlingen, als voorbereidingmateriaal op de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade.

In schooljaar 2008/2009 wordt de eerste ronde op 30 januari 2009 gehouden op scholen in heel Nederland. De 120 winnaars (verdeeld per jaarlaag) van de eerste ronde worden uitgenodigd voor de tweede ronde op de Technische Universiteit Eindhoven. De winnaars daarvan krijgen een uitnodiging voor de training in de periode november 2009 tot juni 2010 voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Die is in 2010 in Kazachstan (in 2010) en daarna in Nederland (2011) en Argentinië (2012).

door: Floris van Doorn

1 De eerste ronde 2006

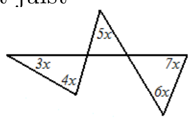
1.1 De opgaven

A-vragen

A1. Aan het begin van een gokspelletje hadden Ali, Bente en Chris geld in de verhouding 11 : 8 : 5. Aan het einde van het spel was dezelfde hoeveelheid geld verdeeld in de verhouding 4 : 3 : 2. Welke uitspraak is waar?

(A) Ali verloor, Bente verloor en Chris won
(B) Ali won, Bente verloor en Chris won
(C) Ali won, Bente verloor en Chris speelde quitte
(D) Ali verloor, Bente speelde quitte en Chris won
(E) Alle antwoorden (A) t/m (D) zijn niet juist

A2. In de figuur is een aantal hoeken in termen van x gegeven. De waarde van x in graden is:



(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15

A3. Als je de getallen 1 t/m 12 achter elkaar opschrijft krijg je het getal 123456789101112 dat uit 15 cijfers bestaat. Als je de getallen 1 t/m n achter elkaar opschrijft dan krijg je een getal dat uit 1788 cijfers bestaat.
Wat is de waarde van n?

(A) 533 (B) 632 (C) 645 (D) 1599 (E) 1689

A4. Hoeveel gehele positieve getallen kleiner dan 1000 zijn er waarbij de som van de cijfers gelijk is aan 6?

(A) 7 (B) 16 (C) 27 (D) 28 (E) 35

A5. In een magisch vierkant is de som van de drie getallen in elke rij, de som van de drie getallen in elke kolom en de som van de drie getallen in elk van de twee diagonalen steeds hetzelfde getal.
In het magische vierkant hiernaast zijn vier van de negen getallen gegeven.
Wat is de waarde van N?

	N	
11		15
12		10

(A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 13 (E) 17

A6. 2143 en 3421 zijn twee voorbeelden van getallen die je kunt vormen door elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken.
Als je alle getallen die je kunt vormen door elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken bij elkaar optelt, dan krijg je als antwoord:

(A) 5555 (B) 9999 (C) 11110 (D) 33330 (E) 66660

A7. Wat is het kleinste positieve verschil tussen twee breuken met zowel in de teller als in de noemer een positief geheel getal kleiner dan of gelijk aan 10?

(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{99}$ (C) $\frac{1}{90}$ (D) $\frac{1}{70}$ (E) $\frac{1}{10}$

A8. Driehoek $\triangle ABC$ is rechthoekig in C. Het punt P ligt op de zijde BC, het punt Q ligt op de zijde AC en het punt R ligt op de zijde AB zó, dat $|BP| = |BR|$ en $|AQ| = |AR|$. Hoek $\angle PRQ$ is:

(A) 30° (B) 45° (C) 50° (D) 55° (E) 60°

B-vragen

B1. Gegeven is een vierkant $ABCD$. Je begint in hoekpunt A. Bij iedere beurt mag je langs een zijde van een hoekpunt naar een ander hoekpunt lopen.
Hoeveel wandelingen van 10 beurten zijn er waarbij je na de 10 beurten weer in hoekpunt A terug bent? Tijdens een wandeling mag je onderweg A passeren.

B2. Hoeveel getallen van vier cijfers zijn er met de volgende eigenschappen:
- het tweede cijfer is het gemiddelde van het eerste cijfer en het derde cijfer,
- het derde cijfer is het gemiddelde van het tweede cijfer en het vierde cijfer?

(Een getal begint niet met het cijfer 0.)

B3. Binnen een vierkant $ABCD$ ligt een punt P. E is het midden van de zijde CD. Gegeven is: $|AP| = |BP| = |EP| = 10$.
Wat is de oppervlakte van vierkant $ABCD$?

B4. $\overline{ab}$ is de notatie voor het getal dat je opschrijft met de cijfers a en b, waarbij $a \neq 0$.
Geef alle positieve gehele waarden van K waarvoor het volgende geldt:
- K is een positief geheel getal
- er bestaat een getal $\overline{ab}$ dat niet deelbaar is door 9 met $\overline{ab} = K \cdot (a+b)$.

1.2 De uitwerkingen

A-vragen

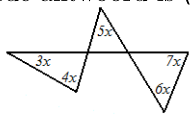
A1. Aan het begin van een gokspelletje hadden Ali, Bente en Chris geld in de verhouding 11 : 8 : 5. Aan het einde van het spel was dezelfde hoeveelheid geld verdeeld in de verhouding 4 : 3 : 2. Welke uitspraak is waar?

(A) Ali verloor, Bente verloor en Chris won
(B) Ali won, Bente verloor en Chris won
(C) Ali won, Bente verloor en Chris speelde quitte
(D) Ali verloor, Bente speelde quitte en Chris won
(E) Alle antwoorden (A) t/m (D) zijn niet juist

Uitwerking Voordat je deze opgave kan oplossen moet je natuurlijk weten wat 11 : 8 : 5 en 4 : 3 : 2 betekent. 11 : 8 : 5 betekent dat er in het totaal 24 $(11 + 8 + 5 = 24)$ even grote delen zijn, dat Ali daar 11 van heeft, Bente 8 en Chris 5. Dus Ali heeft $\frac{11}{24}$ van het totaal, Bente heeft $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ en Chris $\frac{5}{24}$ deel.

Aan het eind van het spel heeft Ali $\frac{4}{9}$, Bente $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ en Chris $\frac{2}{9}$. Je ziet nu meteen dat Bente voor en na het spel $\frac{1}{3}$ deel had, dus die speelde quitte. Hierdoor vallen (A), (B) en (C) al af.
Nu moet je nog kijken naar Ali en Chris. Ali had voor het spel $\frac{11}{24}$, en daarna $\frac{4}{9}$. Nu moeten we weten welke breuk meer is. Dit is niet makkelijk te zien, omdat beide getallen breuken zijn. Maar je kan beide noemers gelijknamig maken door boven en onder de streep met hetzelfde getal te vermenigvuldigen. Ali had dan voor het spel $\frac{11}{24} = \frac{11\times 9}{24\times 9} = \frac{99}{24\times 9}$ en na afloop $\frac{4}{9} = \frac{4\times 24}{9\times 24} = \frac{96}{9\times 24}$. Deze breuken kunnen we wel vergelijken we zien dat Ali dus geld heeft verloren. Bente speelde quitte, dus dan moet Chris wel gewonnen hebben. Het goede antwoord is (D).

A2. In de figuur is een aantal hoeken in termen van x gegeven. De waarde van x in graden is:



(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15

Uitwerking In deze opgave zijn twee dingen belangrijk: de som van de hoeken van een driehoek is 180°, en twee “overstaande” hoeken (van de vier hoeken die je krijgt als twee lijnen elkaar snijden) zijn even groot.
Voor het linkerdriehoekje geldt nu dat $3x + 4x +$ de onbekende hoek $= 180°$, dus de onbekende hoek is $180° - 7x$. Dus ook de linkerhoek van de middelste driehoek is $180° - 7x$.
In de meest rechtse driehoek geldt dat $6x + 7x +$ de onbekende hoek $= 180°$, dus de onbekende hoek is $180° - 13x$. Dus ook de rechterhoek van de middelste driehoek is $180° - 13x$.
In de middelste driehoek geldt nu ook dat de som van de hoeken 180° is, dus $(5x) + (180° - 7x) + (180° - 13x) = 180°$. Nu kan je x oplossen:

$$\begin{aligned} 5x + 180° - 7x + 180° - 13x &= 180° \\ 360° - 15x &= 180° \\ 180° - 15x &= 0° \\ 180° &= 15x \\ x &= \frac{180°}{15} = 12° \end{aligned}$$

Dus $x = 12°$, en het goede antwoord is (D).

A3. Als je de getallen 1 t/m 12 achter elkaar opschrijft krijg je het getal 123456789101112 dat uit 15 cijfers bestaat. Als je de getallen 1 t/m n achter elkaar opschrijft dan krijg je een getal dat uit 1788 cijfers bestaat.
Wat is de waarde van n?

(A) 533 (B) 632 (C) 645 (D) 1599 (E) 1689

Uitwerking Het is handig om meer over n te weten te komen, bijvoorbeeld het aantal cijfers waar n uit bestaat. Als je de getallen 1 tot en met 99 opschrijft, dan zitten daar 9 getallen in met één cijfer (de getallen van 1 tot 9), en 90 getallen met twee cijfers (van 10 tot 99). Het aantal cijfers is dus $9 \times 1 + 90 \times 2 = 9 + 180 = 189$.
Als je de getallen 1 tot en met 999 opschrijft, dan zitten daar 189 cijfers in van 1 tot 99 (zoals hierboven uitgelegd is), en ook nog 900 getallen (van 100 tot 999) met drie cijfers. Dit zijn in het totaal $189 + 900 \times 3 = 189 + 2700 = 2889$. Dit is al veel meer dan het aantal gegeven cijfers (namelijk 1788) als je 1 t/m n achter elkaar opschrijft.
Dus n zit ergens tussen de 100 en de 1000. Het getal dat je krijgt als je 1 t/m n opschrijft, bestaat dus in ieder geval uit 189 cijfers van de getallen 1 t/m 99, en alle andere getallen hebben drie cijfers. Als je 100 t/m n achter elkaar opschrijft, dan bestaat dat uit $1788 - 189 = 1599$ cijfers (namelijk 189 minder als je 1 t/m n opschrijft). Er zijn dus 1599 cijfers van getallen met allemaal drie cijfers. Dit aantal getallen moet dus $\frac{1599}{3} = 533$ zijn. Maar dan heb ik de eerste 99 getallen niet opgeschreven, dus in het totaal is $n = 533 + 99 = 632$, dus antwoord (B) is goed.

Deze opgave kon je ook iets makkelijker doen, omdat je de mogelijkheden al wist. Je kon ook het aantal cijfers tellen als n een van de mogelijke antwoorden is, maar de oplossing die ik gaf, werkt ook als deze opgave niet multiple-choice was.

A4. Hoeveel gehele positieve getallen kleiner dan 1000 zijn er waarbij de som van de cijfers gelijk is aan 6?

(A) 7 (B) 16 (C) 27 (D) 28 (E) 35

Uitwerking Ik ga gewoon alle getallen tellen met de som van de cijfers 6. Stel dat het eerste cijfer (van de honderdtallen) van het getal 6 is, dan moeten

beide andere cijfers wel 0 zijn. Dus dan is 600 de enige mogelijkheid.
Als het eerste cijfer 5 is, dan moet een van de andere cijfers 1 zijn, en de andere 0. Dus dan zijn er twee mogelijkheden: 510 en 501.
Als het eerste cijfer 4 is, dan moet ik nog 2 verdelen over de andere cijfers. Dit kan op 3 manieren: 420, 411 en 402.
Is het eerste cijfer 3, dan heb ik nog 3 over, en die kan ik op 4 manieren verdelen: 330, 321, 312 en 303.
Zo ga ik verder: is het eerste cijfer 2, dan zijn er 5 mogelijkheden: 240, 231, 222, 213 en 204. Bij het eerste cijfer 1, zijn het er 6 (150, 141, 132, 123, 114, 105) en als het getal onder de honderd is (dan is het eerste cijfer dus eigenlijk 0), dan zijn er 7 mogelijkheden (60, 51, 42, 33, 24, 15, 06).
In het totaal zijn er dus $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ mogelijkheden, dus het antwoord is (D).

A5. In een magisch vierkant is de som van de drie getallen in elke rij, de som van de drie getallen in elke kolom en de som van de drie getallen in elk van de twee diagonalen steeds hetzelfde getal.
In het magische vierkant hiernaast zijn vier van de negen getallen gegeven.
Wat is de waarde van N?

	N	
11		**15**
12		**10**

(A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 13 (E) 17

Uitwerking Ik noem de som van de cijfers in elke kolom, rij en diagonaal S. Omdat 11, 15 en het middelste vakje op dezelfde rij zitten, moet dus 11+15+de waarde in het middelste vakje $= S$. Het getal in het middelste vakje is dus $S - 11 - 15 = S - 26$.
Dit trucje kan ik ook op de linkerkolom toepassen. Het vakje linksboven staat samen met 12 en 11 in een kolom, dus het vakje linksboven is $S-11-12 = S-23$.
Nu kijk ik naar de diagonaal van linksboven naar rechtsonder. Daar staan de getallen $S - 26$, $S - 23$ en 10. Deze zijn bij elkaar ook weer gelijk aan S. Dus

$$\begin{aligned} S - 26 + S - 23 + 10 &= S \\ 2 \times S - 39 &= S \\ 2 \times S &= S + 39 \\ S &= 39 \end{aligned}$$

Nu is het getal in het midden dus $39-26 = 13$, en het getal onder is $39-12-10 = 17$. Het getal boven (N) is dus $N = 39-13-17 = 9$. Dus het antwoord is (B).

A6. 2143 en 3421 zijn twee voorbeelden van getallen die je kunt vormen door elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken. Als je alle getallen die je kunt vormen door elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 precies één keer te gebruiken bij elkaar optelt, dan krijg je als antwoord:

(A) 5555 (B) 9999 (C) 11110 (D) 33330 (E) 66660

Uitwerking Eerst ga ik kijken hoeveel van die getallen er nou zijn. Voor het eerste cijfer zijn 4 mogelijkheden (1, 2, 3 en 4). Voor het tweede cijfer nog maar 3, want het getal dat op de eerste plaats stond, mag niet ook op de tweede plaats staan. Het derde cijfer heeft nog 2 mogelijkheden, en het laatste cijfer maar 1. In het totaal zijn er dan $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ mogelijkheden.
Deze 24 getallen kan je allemaal uitschrijven en bij elkaar optellen, maar dat is veel werk. Verder maak je daar misschien makkelijker een rekenfoutje in. Daarom ga ik ze op een andere manier bij elkaar optellen.
In deze 24 mogelijkheden komen de cijfers 1, 2, 3 en 4 even vaak op de laatste plaats, dus allemaal 6 keer. Als ik dan de eenheden bij elkaar optel, dan heb ik 6 enen, 6 tweeën, 6 drieën en 6 vieren. Bij elkaar opgeteld is dit dus $6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$.
Maar dit kan ik precies hetzelfde doen voor de tientallen, honderdtallen en duizendtallen. Op die plaatsen komen ook 6 enen, 6 tweeën, 6 drieën en 6 vieren. Dus als ik de tientallen bij elkaar optel krijg ik 600, als ik de honderdtallen optel krijg ik 6000, en bij de duizendtallen 60000. De som wordt dan $60+600+6000+60000 = 66660$. Het antwoord is dus (E).

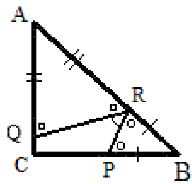
A7. Wat is het kleinste positieve verschil tussen twee breuken met zowel in de teller als in de noemer een positief geheel getal kleiner dan of gelijk aan 10?

(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{99}$ (C) $\frac{1}{90}$ (D) $\frac{1}{70}$ (E) $\frac{1}{10}$

Uitwerking Je wil twee breuken kiezen met de teller en de noemer beide maximaal 10, waarvan het verschil heel klein is. Als je breuken neemt met een kleine noemer, bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$, dan is het verschil met bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ nog best veel (namelijk $\frac{1}{6}$). Het verschil wordt kleiner als je ook kleine breuken neemt. Je kan dus op goed geluk het verschil tussen $\frac{1}{9}$ en $\frac{1}{10}$ nemen, dat is namelijk

$\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{10}{90} - \frac{9}{90} = \frac{1}{90}$.
Nu heb je een klein verschil gevonden, maar je wil nu ook nog bewijzen dat dit het allerkleinste verschil is. Dat is iets lastiger. Stel dat je het verschil van de twee breuken ook weer als een breuk schrijft, dan wil je dat die breuk zo klein mogelijk is. Dit krijg je als de teller heel klein is, en de noemer heel groot. Het kleinste wat de teller kan zijn is natuurlijk 1 (0 mag niet, want dan is het verschil 0), en dat was ook zo bij $\frac{1}{90}$. De noemer moet ook groot zijn, en 90 is inderdaad het grootste wat je kan halen. De noemer is namelijk het product van de noemers waarvan je het verschil nam (bijvoorbeeld: $\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$, en $40 = 5 \times 8$). Het maximale product is 10×9, dus 90 is de maximale noemer. 100 kan niet als noemer omdat je dan twee breuken met noemer 10 moet nemen, en als je die van elkaar afhaalt, dan houd je slechts een breuk over met noemer 10 (bijvoorbeeld $\frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$).
Dus $\frac{1}{90}$ is inderdaad het kleinste verschil en het goede antwoord is (C).

A8. Driehoek $\triangle ABC$ is rechthoekig in C. Het punt P ligt op de zijde BC, het punt Q ligt op de zijde AC en het punt R ligt op de zijde AB zó, dat $|BP| = |BR|$ en $|AQ| = |AR|$. Hoek $\angle PRQ$ is:



(A) 30° (B) 45° (C) 50° (D) 55° (E) 60°

Uitwerking Bij een meetkunde-opgave moet je eerst een plaatje tekenen; zie hierboven. De hoek die je moet weten is $\angle PRQ$. Dit moet je als volgt lezen: $\angle$ betekent gewoon dat het een hoek is. De hoek waar het om gaat is hoek R (de middelste letter). Maar omdat er meerdere hoeken R zijn, geven de P en de Q eromheen dat de hoek tussen lijn PR en QR wordt bedoelt. Dus $\angle PRQ$ is de hoek met het boogje erin. Verder wordt met bijvoorbeeld $|BP|$ de lengte van lijnstuk BP bedoelt.
Voor de opgave zijn een paar dingen belangrijk: de som van de hoeken van een driehoek is 180°; de som van de hoeken die samen een rechte lijn vormen zijn ook 180° (dus de drie hoeken die samen R vormen zijn bij elkaar 180°); en in een gelijkbenige driehoek zijn twee hoeken gelijk. Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met twee zijden die even lang zijn. In deze opgave zijn de driehoeken $\triangle BPR$ en $\triangle AQR$ gelijkbenig. Dus in de tekening zijn de hoeken met een vierkantje erin even groot, en de hoeken met een rondje erin ook.
Als je de opgave net ziet, heb je misschien geen enkel idee waar je moet be-

ginnen. Een goede tactiek is vaak om terug te redeneren. Dan moet je jezelf vragen wat je wil weten, en wat je nodig hebt om dat te weten te komen, wat je daarvoor weer nodig hebt, enzovoorts.
In deze opgave wil je de hoek met het boogje erin weten. Dan is het voldoende om $\circ + \square$ te weten, samen met boogje is dit namelijk 180°. Als je het dubbele ervan weet, dus $2\times\circ + 2\times\square$, dan ben je er ook. $2\times\square$ is de gelijk aan $180° - \angle A$, en $2\times\circ = 180° - \angle B$. Dus $2\times\circ + 2\times\square = 180° - \angle A + 180° - \angle B = 360° - \angle A - \angle B$. Je weet dat $\angle C = 90°$ (er staat in de opgave dat $\angle C$ recht is, en dat betekent dat $\angle C = 90°$), dus $\angle A + \angle B = 180° - 90° = 90°$. Dit betekent dat $360° - \angle A - \angle B = 360° - 90° = 270°$.
Nu hebben we alleen nog maar vanuit het antwoord naar het begin geredeneerd. We moeten de stappen nu nog in de goede volgorde opschrijven. Die 270° was gelijk aan $360° - \angle A - \angle B$, dus ook aan $2 \times \circ + 2 \times \square$. Nu is $\circ + \square$ de helft daarvan, dus $\circ + \square = 135°$. Het boogje is dan $\angle PRQ = 180° - 135° = 45°$. Dus antwoord (B) is het juiste antwoord.

B-vragen

B1. Gegeven is een vierkant $ABCD$. Je begint in hoekpunt A. Bij iedere beurt mag je langs een zijde van een hoekpunt naar een ander hoekpunt lopen.
Hoeveel wandelingen van 10 beurten zijn er waarbij je na de 10 beurten weer in hoekpunt A terug bent? Tijdens een wandeling mag je onderweg A passeren.

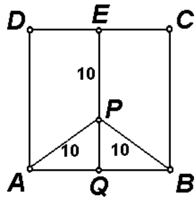
Uitwerking $ABCD$ betekent dat A naast B naast C naast D ligt. Dus A ligt tegenover C. Dan kan je in de eerste beurt twee kanten op, naar B en D. Vanuit elk hoekpunt kan je ook weer twee kanten op. Verder ga je van A of C altijd naar B of D en vanuit B of D ga je altijd naar A of C. Dat wisselt dus de hele tijd af, en na 9 beurten zit je altijd in B of D. Dan moet je de laatste beurt weer terug naar A. Je kan dus 9 beurten kiezen uit twee mogelijkheden. In het totaal zijn er dus $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^9 = 512$ mogelijkheden. Het antwoord is dus 512.

B2. Hoeveel getallen van vier cijfers zijn er met de volgende eigenschappen:
- het tweede cijfer is het gemiddelde van het eerste cijfer en het derde cijfer,
- het derde cijfer is het gemiddelde van het tweede cijfer en het vierde cijfer?

(Een getal begint niet met het cijfer 0.)

Uitwerking Iets wat handig is in deze opgave is dat als je het gemiddelde van twee getallen neemt, het verschil tussen het gemiddelde en het eerste getal gelijk is aan het verschil tussen het gemiddelde en het tweede getal. Bijvoorbeeld: het gemiddelde van 3 en 7 is 5. En $5 - 3 = 2$ en ook $7 - 5 = 2$. Dus het verschil tussen de eerste twee cijfers is gelijk aan het verschil tussen het tweede en het derde cijfer. Maar ook geldt dat het verschil tussen het tweede en derde cijfer weer hetzelfde is als het verschil tussen de laatste twee cijfers. Met andere woorden: het verschil tussen twee cijfers naast elkaar is elke keer gelijk.
Als het verschil 0 is, dan voldoen de volgende getallen: 1111, 2222, 3333, tot en met 8888 en 9999. Dit zijn er 9.
Als het verschil 1 is, dan voldoen de volgende getallen: 1234, 2345, tot en met 5678 en 6789. Dit zijn er 6.
Bij verschil 2 voldoen de getallen 1357, 2468 en 3579. Dit zijn er 3.
Met verschil 3 zijn er geen getallen die voldoen.
Maar de cijfers kunnen ook omlaag gaan. Je zou misschien denken dat er evenveel getallen zijn met cijfers die omlaag gaan, maar dat klopt niet, omdat het eerste cijfer niet 0 mag zijn, maar het laatste wel. Dus als het getal omlaag loopt voldoen de volgende getallen:
Bij verschil 0, de getallen die we al bekeken hebben. Die hoeven we dus niet nog een keer te tellen.
Bij verschil 1: 9876, 8765, tot en met 4321 en 3210. Dit zijn er 7.
Bij verschil 2: 9753, 8642, 7531 en 6420. Dit zijn er 4.
Bij verschil 3 voldoet er nu wel eentje: 9630.
In totaal zijn er dus $9+6+3+7+4+1 = 30$ getallen die voldoen. Het antwoord is dus 30.

B3. Binnen een vierkant $ABCD$ ligt een punt P. E is het midden van de zijde CD. Gegeven is: $|AP| = |BP| = |EP| = 10$.
Wat is de oppervlakte van vierkant $ABCD$?



Uitwerking Hierboven staat een plaatje van wat is gegeven. In het plaatje is EP doorgetrokken en het snijpunt met AB noem ik Q. Omdat E het midden is van CD, is Q het midden van AB. Dus $2 \times |AQ|$ is de lengte van een zijde. De lengte $|QE|$ is gelijk aan de lengte van een zijde, dus $|QP| + 10$ is ook de lengte van een zijde. Dus $2 \times |AQ| = |QP| + 10$, of anders geschreven: $|QP| = 2 \times |AQ| - 10$.
De stelling van Pythagoras zegt dat als a, b en c zijden van een driehoek zijn, en de hoek tegenover zijde c is recht (90°), dat dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$. Dus volgens de stelling van Pythagoras geldt $|AQ|^2 + |QP|^2 = 10^2$. Ik vul in plaats van $|QP|$ nu $2 \times |AQ| - 10$ in, dat was namelijk hetzelfde. Dan staat er:

$$\begin{aligned} |AQ|^2 + (2 \times |AQ| - 10)^2 &= 100 \\ |AQ|^2 + (2 \times |AQ| - 10) \times (2 \times |AQ| - 10) &= 100 \end{aligned}$$

Als je de haakjes wegwerkt in het product, krijg je vier termen:
$(2 \times |AQ|) \times (2 \times |AQ|) = 4 \times |AQ|^2$;
$-10 \times (2 \times |AQ|) = -20 \times |AQ|$;
$(2 \times |AQ|) \times -10 = -20 \times |AQ|$;
$-10 \times -10 = 100$ (min keer min is plus).

$$\begin{aligned} |AQ|^2 + 4 \times |AQ|^2 - 20 \times |AQ| - 20 \times |AQ| + 100 &= 100 \\ 5 \times |AQ|^2 - 40 \times |AQ| + 100 &= 100 \\ 5 \times |AQ|^2 - 40 \times |AQ| &= 0 \\ 5 \times |AQ|^2 &= 40 \times |AQ| \\ |AQ|^2 &= 8 \times |AQ| \\ |AQ| &= 8 \end{aligned}$$

Dus $|AQ| = 8$. En dat was de helft van een zijde, dus de zijden hebben lengte 16. De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijden, dus de oppervlakte is $16^2 = 256$. Het antwoord is dus 256.

B4. $\overline{ab}$ is de notatie voor het getal dat je opschrijft met de cijfers a en b, waarbij $a \neq 0$.
Geef alle positieve gehele waarden van K waarvoor het volgende geldt:
- K is een positief geheel getal
- er bestaat een getal $\overline{ab}$ dat niet deelbaar is door 9 met $\overline{ab} = K \cdot (a + b)$.

Uitwerking $\overline{ab}$ betekent $a \times 10 + b$ en $K \times (a + b) = K \times a + K \times b$. Nu is de tweede voorwaarde $a \times 10 + b = K \times a + K \times b$. Als ik dingen naar de andere kant haal staat er $a \times 10 - a \times K = b \times K - b$. Dit is gelijk aan $a \times (10 - K) = b \times (K - 1)$. In deze laatste stap haal ik het volgende trucje uit: als je bijvoorbeeld $700 - 300$ wil berekenen, kan je ook $100 \times (7 - 3)$ berekenen, het is allebei 400.
Nu ga ik kijken welke K voldoen. In de vergelijking $a \times (10 - K) = b \times (K - 1)$ moet natuurlijk gelden dat a tussen 1 en 9 ligt, en b tussen 0 en 9.
Als $\underline{K = 1}$ staat er $a \times 9 = 0$. Dat betekent dat $a = 0$ maar dat mag niet volgens de opgave. Dus $K = 1$ voldoet niet. Als $\underline{K = 2}$ staat er $a \times 8 = b$. Dus $a = 1$ en $b = 8$ (als a meer dan 1 is, wordt b te groot), en dan geldt $\overline{ab} = 18$. Maar 18 is deelbaar door 9, en dat mag ook niet. Dus $K = 2$ voldoet ook niet. Als $\underline{K = 3}$ staat er $a \times 7 = b \times 2$. Dus $a = 2$ en $b = 7$ ($a = 1$ werkt niet, en a mag weer niet groter zijn dan 2), en dan geldt $\overline{ab} = 27$. Maar 27 is deelbaar door 9. Dus $K = 3$ voldoet niet. Als $\underline{K = 4}$ staat er $a \times 6 = b \times 3$ en dat is hetzelfde als $a \times 2 = b$. Dan kan je bijvoorbeeld $a = 1$ en $b = 2$ kiezen, zodat $\overline{ab} = 12$. Dit voldoet aan voorwaarde 2. Dus $K = 4$ voldoet. Als $\underline{K = 5}$ staat er $a \times 5 = b \times 4$. Alleen $a = 4$ en $b = 5$ voldoet, net zoals hierboven, en dan is $\overline{ab} = 45$. Maar 45 is deelbaar door 9. Dus $K = 5$ voldoet niet. Als $\underline{K = 6}$ staat er $a \times 4 = b \times 5$. Dus $a = 5$ en $b = 4$, zodat $\overline{ab} = 54$, maar 54 is deelbaar door 9. Dus $K = 6$ voldoet niet. Als $\underline{K = 7}$ staat er $a \times 3 = b \times 6$ en dat is hetzelfde als $a = b \times 2$. Dan kan je bijvoorbeeld $a = 2$ en $b = 1$ kiezen, zodat $\overline{ab} = 21$. Dit voldoet aan voorwaarde 2. Dus $K = 7$ voldoet. Als $\underline{K = 8}$ staat er $a \times 2 = b \times 7$, zodat $\overline{ab} = 72$ als enige kan, maar 72 is deelbaar door 9. Dus $K = 8$ voldoet niet. Als $\underline{K = 9}$ staat er $a \times 1 = b \times 8$, met alleen $\overline{ab} = 81$, wat ook deelbaar is door 9. Dus $K = 9$ voldoet niet. Als $\underline{K = 10}$ staat er $0 = b \times 9$. Dat betekent dat $b = 0$, dus bijvoorbeeld $\overline{ab} = 10$. Dit voldoet aan voorwaarde 2. Dus $K = 10$ voldoet. Als $\underline{K \text{ groter is dan } 10}$, dan is $a \times (10 - K)$ kleiner dan 0 (want a is groter dan 0, en $10 - K$ is kleiner dan 0) maar $b \times (K - 1)$ groter dan 0 (b en $K - 1$ zijn groter dan 0). Dus dan kan dat nooit gelijk zijn.
Het antwoord is dus 4, 7 en 10.

door: Alexander van Hoorn

2 De eerste ronde 2007

2.1 De opgaven

A-vragen

A1. Het getal M bestaat uit 2007 enen achter elkaar geschreven, $M = 111\ldots111$.
Wat is de som van de cijfers van het getal dat je krijgt als je M vermenigvuldigt met 2007?

(A) 2007 (B) 18036 (C) 18063 (D) 18084 (E) 4028049

A2. In de volgende rijtjes staan telkens dezelfde vijf getallen.
Welk van de vijf rijtjes is juist geordend?

(A) $0,16 < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < \frac{5}{33}$

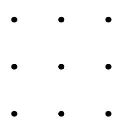
(B) $\frac{17}{101} < 0,16 < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < \frac{13}{97}$

(C) $\frac{1}{7} < 0,16 < \frac{5}{33} < \frac{17}{101} < \frac{13}{97}$

(D) $\frac{5}{33} < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < 0,16$

(E) $\frac{13}{97} < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < 0,16 < \frac{17}{101}$

A3. In de figuur staan negen roosterpunten. Hoeveel driehoeken kun je tekenen met de hoekpunten in drie van deze negen punten?



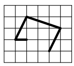
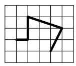
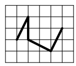
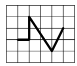
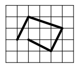
(A) 76 (B) 84 (C) 92 (D) 496 (E) 504

A4. Hoeveel paren (a,b) van positieve gehele getallen met $a+b<100$ zijn er die voldoen aan de vergelijking:

$$a+\frac{1}{b}=13\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right)?$$

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 13 (E) 28

A5. Vijf roosterpunten zijn door vijf verschillende routes verbonden. Welke van de vijf routes is het kortst?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

A6. Een rij getallen wordt als volgt opgebouwd. Het eerste getal is 2. Het tweede getal is 2. Elk volgend getal is het product van zijn twee voorgangers. De rij wordt dus: $2,2,4,8,32,\ldots$ Op welk cijfer eindigt het 2007^{e} getal in deze rij?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

A7. Heeft de vergelijking $9^n+9^n+9^n=3^{2007}$ een geheel getal als oplossing? Zo ja, wat is n dan?

(A) 667 (B) 669 (C) 1003 (D) 2006 (E) nee

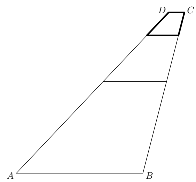
A8. Negen stoelen staan in een rij achter een lange tafel. Zes leerlingen en drie leraren, de heer Aap, de heer Noot en mevrouw Mies, nemen plaats op deze stoelen. Eerst arriveren de drie leraren. Zij besluiten zo te gaan zitten dat elke leraar tussen twee leerlingen zit. Op hoeveel manieren kunnen de heer Aap, de heer Noot en mevrouw Mies hun stoelen kiezen?

(A) 12 (B) 36 (C) 60 (D) 84 (E) 630

B-vragen

B1. Nummer één kaartje met '1', twee kaartjes met '2', drie kaartjes met '3', ..., vijftig kaartjes met '50'. Stop al deze kaartjes in een doos en schud ze goed door elkaar. Hoeveel kaartjes moet je ten minste uit de doos pakken om er zeker van te zijn dat je minimaal tien kaartjes met hetzelfde nummer hebt?

B2. Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met zijden $|AB| = 16$, $|BC| = 21$, $|CD| = 2$ en $|DA| = 28$. Verder is AB evenwijdig met CD. Twee lijnen die evenwijdig zijn met AB en CD verdelen vierhoek $ABCD$ in drie gelijkvormige vierhoeken. Bereken de omtrek van de kleinste van die drie vierhoeken.



B3. Voor elk tweetal positieve gehele getallen a en b definiëren we een bewerking $a \otimes b$ met de volgende drie eigenschappen:

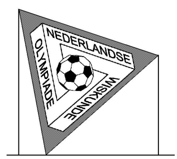
$$a \otimes a = a + 2$$

$$a \otimes b = b \otimes a$$

$$\frac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \frac{a+b}{b}$$

Bepaal $8 \otimes 5$.

B4. Een vlag in de vorm van een gelijkzijdige driehoek is aan twee hoekpunten opgehangen aan de toppen van twee verticale palen. De ene paal heeft een lengte 4 en de andere paal een lengte 3. Verder is gegeven dat het derde hoekpunt van de vlag precies de grond raakt. Bepaal de lengte van de zijde van de vlag.



2.2 De uitwerkingen

A-vragen

A1. Het getal M bestaat uit 2007 enen achter elkaar geschreven, $M = 111\ldots111$.
Wat is de som van de cijfers van het getal dat je krijgt als je M vermenigvuldigt met 2007?

(A) 2007 (B) 18036 (C) 18063 (D) 18084 (E) 4028049

Uitwerking Om inzicht te krijgen in wat er gebeurt als je M met 2007 vermenigvuldigt, is het handig te kijken wat er gebeurt als M uit minder enen bestaat. Je hebt:
$1 \cdot 2007 = 2007$, som van de cijfers: 9.
$11 \cdot 2007 = 22077$, som van de cijfers: 18.
$111 \cdot 2007 = 222777$, som van de cijfers: 27.
$1111 \cdot 2007 = 2229777$, som van de cijfers: 36.
$11111 \cdot 2007 = 22299777$, som van de cijfers: 45.
Elke keer dat je nu een 1 vóór M zet, komt er bij dit product aan de linkerkant een 2 bij en wordt de meest rechtse 2 vervangen door een 9, want er komt dan $20070000\ldots000$ bij. De som van de cijfers gaat dus steeds met 9 omhoog. Als M uit 2007 enen bestaat, is de som van de cijfers van $M \cdot 2007$ dus gelijk aan $2007 \cdot 9 = 18063$. Het juiste antwoord is dus (C).

A2. In de volgende rijtjes staan telkens dezelfde vijf getallen.
Welk van de vijf rijtjes is juist geordend?

(A) $0,16 < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < \frac{5}{33}$

(B) $\frac{17}{101} < 0,16 < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < \frac{13}{97}$

(C) $\frac{1}{7} < 0,16 < \frac{5}{33} < \frac{17}{101} < \frac{13}{97}$

(D) $\frac{5}{33} < \frac{1}{7} < \frac{13}{97} < \frac{17}{101} < 0,16$

(E) $\frac{13}{97} < \frac{1}{7} < \frac{5}{33} < 0,16 < \frac{17}{101}$

Uitwerking Als je snel kunt staartdelen kun je alles op twee decimalen nauwkeurig uitrekenen en dan weet je het antwoord. Of je kunt alle breuken apart gelijknamig maken om ze te kunnen vergelijken.
Maar als je daar geen tijd voor hebt en goed naar de getallen kijkt, valt je misschien op dat $\frac{5}{33} = \frac{15}{99}$ en dat $0,16 = \frac{16}{100}$. En $\frac{1}{7}$ kunnen we schrijven als $\frac{14}{98}$. De vijf getallen zien er nu veel minder willekeurig uit: $\frac{13}{97}, \frac{14}{98}, \frac{15}{99}, \frac{16}{100}, \frac{17}{101}$. Nu is de vraag: als van een breuk de teller en de noemer allebei 1 groter worden, kun je dan zeggen of de waarde van de breuk groter of kleiner wordt? Stel je hebt de breuken $\frac{k}{n}$ en $\frac{k+1}{n+1}$, dan geldt

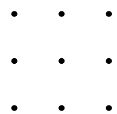
$$\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{kn+n}{n(n+1)} - \frac{kn+k}{n(n+1)} = \frac{n-k}{n(n+1)}.$$

Dat is positief als $n > k$. Je weet nu dat $\frac{k+1}{n+1} > \frac{k}{n}$. Hierdoor zie je in één keer dat

$$\frac{13}{97} < \frac{14}{98} < \frac{15}{99} < \frac{16}{100} < \frac{17}{101},$$

en dat is antwoord (E).

A3. In de figuur staan negen roosterpunten. Hoeveel driehoeken kun je tekenen met de hoekpunten in drie van deze negen punten?



(A) 76 (B) 84 (C) 92 (D) 496 (E) 504

Uitwerking Je zult misschien eerst proberen de driehoeken handmatig te tellen. Na wat tijd daaraan verspild te hebben, bedenk je dat dat niet werkt. Maar een driehoek heeft gewoon drie verschillende punten die niet op één lijn liggen. Je moet dus berekenen hoeveel van zulke drietallen punten er in de figuur te vinden zijn.
Voor het eerste punt van de driehoek zijn er 9 mogelijkheden, voor het tweede punt 8 en voor het derde punt 7, dus zijn er $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ mogelijkheden om een eerste, een tweede en een derde punt te kiezen. Maar als je de punten van een driehoek verwisselt blijft het dezelfde driehoek, dus hebben we elk mogelijk drietal $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ keer geteld. Er zijn dus maar $\frac{504}{6} = 84$ verschillende manieren om drie punten te kiezen. Maar drie punten zijn geen driehoek als ze op één lijn liggen. In het rooster liggen bij 8 van de 84 drietallen de punten op één lijn: drie horizontaal, drie verticaal en twee diagonaal. Er zijn dus $84 - 8 = 76$ driehoeken te vinden; dat is antwoord (A).

A4. Hoeveel paren (a, b) van positieve gehele getallen met $a + b < 100$ zijn er die voldoen aan de vergelijking:

$$a + \frac{1}{b} = 13 \cdot \left(b + \frac{1}{a}\right)?$$

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 13 (E) 28

Uitwerking Eén van de dingen die je meteen wilt doen, is dingen anders opschrijven. Wat je kunt doen is aan beide kanten er één breuk van maken. Je krijgt

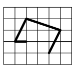
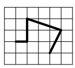
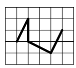
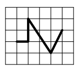
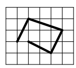
$$\frac{ab+1}{b} = 13 \cdot \frac{ab+1}{a}.$$

Aan beide kanten staat nu een factor $ab + 1$, die je kunt wegdelen. Je krijgt:

$$\frac{1}{b} = 13 \cdot \frac{1}{a},$$

ofwel $a = 13b$. Nu moet nog $a + b < 100$, dus $14b < 100$. Voor b voldoen de getallen 1 t/m 7, dus we krijgen antwoord (B).

A5. Vijf roosterpunten zijn door vijf verschillende routes verbonden. Welke van de vijf routes is het kortst?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Uitwerking Het is in ieder geval nodig de lengte van de routes te berekenen. De horizontale en verticale stukken kun je gewoon optellen en voor de schuine stukken gebruik je de stelling van Pythagoras. Je krijgt de lengtes:

$$A = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{5},$$

$$B = 1 + 2 + \sqrt{10} + \sqrt{5},$$

$$C = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5},$$

$$D = 1 + 2 + \sqrt{13} + \sqrt{5},$$

$$E = \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{5}.$$

Nu is het een kwestie van wegstrepen. A heeft $\sqrt{5}$ waar B een 2 heeft, dus route A is in ieder geval langer dan route B, dus A valt af. Route D heeft een stuk van $\sqrt{13}$ waar B maar $\sqrt{10}$ heeft, dus D valt af. Route E heeft een stuk van $\sqrt{10}$ waar C een stuk van maar 2 heeft, dus ook E valt af. Nu blijft nog de vraag wat kleiner is, de $1+\sqrt{10}$ van B of de $2\times\sqrt{5}$ van C. Om dit in te zien kun je ook de kwadraten bekijken:

$$(1+\sqrt{10})^2 = 1+10+2\sqrt{10} = 11+2\sqrt{10} = 11+\sqrt{40},$$

en

$$(2\times\sqrt{5})^2 = 20 = 11+9 = 11+\sqrt{81}.$$

Dus is route (B) het kortst.

A6. Een rij getallen wordt als volgt opgebouwd. Het eerste getal is 2. Het tweede getal is 2. Elk volgend getal is het product van zijn twee voorgangers. De rij wordt dus: $2, 2, 4, 8, 32, \ldots$ Op welk cijfer eindigt het 2007$^{\text{e}}$ getal in deze rij?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Uitwerking Merk op dat alleen om het laatste cijfer van het 2007$^{\text{e}}$ getal gevraagd wordt. Een getal dat op het cijfer c eindigt is te schrijven als $10n+c$. Als je dit vermenigvuldigt met een getal dat op een d eindigt, $10m+d$, krijg je $100mn+10(mc+nd)+cd$. Als je alleen naar het laatste cijfer kijkt, heeft $100mn+10(mc+nd)$ geen invloed, want dat eindigt op een 0. Het laatste cijfer van het product van een getal dat eindigt op een c en een getal dat eindigt op een d, is dus hetzelfde als het laatste cijfer van cd. Je hoeft dus alleen naar de laatste cijfers van de getallen in de rij te kijken. In plaats van 32 kun je dus gewoon 2 schrijven. Daarna komt 6, want $8\cdot 2 = 16$ en dat eindigt op een 6. Vul de rij zo verder aan:

$$2, 2, 4, 8, 2, 6, 2, 2, 4, 8, 2, \ldots$$

Omdat het volgende cijfer steeds volledig bepaald wordt door de laatste twee in de rij, weet je zeker dat dit stukje zich steeds gaat herhalen: $2, 2, 4, 8, 2, 6$. Als je in de rij zes stappen naar rechts (of naar links) gaat, krijg je hetzelfde cijfer. Omdat $2007-334\cdot 6 = 3$ is het 2007$^{\text{e}}$ cijfer in de rij gelijk aan het derde, en dat is 4. Het juiste antwoord is dus (C).

A7. Heeft de vergelijking $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2007}$ een geheel getal als oplossing? Zo ja, wat is n dan?

(A) 667 (B) 669 (C) 1003 (D) 2006 (E) nee

Uitwerking Je ziet veel drieën: links zie je drie termen, elk met als grondtal 9 ofwel 3^2, en het getal aan de rechterkant heeft ook grondtal 3. Dit vraagt om wat herschrijving:

$$9^n + 9^n + 9^n = 3^{2007},$$

geeft met $9 = 3^2$:

$$3 \cdot (3^2)^n = 3^{2007}.$$

Omdat $(a^b)^c = a^{bc}$, is dat gelijk aan

$$3 \cdot 3^{2n} = 3^{2007},$$

ofwel

$$3^{2n+1} = 3^{2007}.$$

Er geldt $2n+1 = 2007$, dus $n = 1003$ is een oplossing en dat is een geheel getal. We vinden dus antwoord (C).

A8. Negen stoelen staan in een rij achter een lange tafel. Zes leerlingen en drie leraren, de heer Aap, de heer Noot en mevrouw Mies, nemen plaats op deze stoelen. Eerst arriveren de drie leraren. Zij besluiten zo te gaan zitten dat elke leraar tussen twee leerlingen zit. Op hoeveel manieren kunnen de heer Aap, de heer Noot en mevrouw Mies hun stoelen kiezen?

(A) 12 (B) 36 (C) 60 (D) 84 (E) 630

Uitwerking Met de hand tellen is lastig. Je moet het probleem dus op een andere manier bekijken, en dan wordt het een stuk makkelijker.
De enige beperking is dat de leraren tussen de kinderen willen zitten, dus als je nou denkbeeldig de kinderen in een rij laat staan, dan kan elke leraar tussen twee kinderen gaan staan. Er zijn 6 kinderen dus 5 tussenruimtes. Mies heeft dus 5 keuzemogelijkheden, Noot 4 en Aap 3. In totaal zijn er $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mogelijkheden. Het juiste antwoord is dus (C).
Een andere manier is dat je denkbeeldig aan elke leraar alvast een leerling aan de rechterkant plakt. Verder zet je op de meest linker stoel ook alvast een

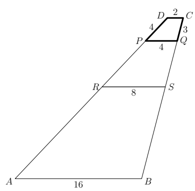
leerling. Dan zijn er dus maar twee leerlingen en drie leraren (met elk een leerling aan de rechterkant vastgeplakt), die op een of andere manier in een rij moeten gaan staan. Dat kan op $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ manieren, maar het omwisselen van die twee leerlingen geeft qua plek van de leraren hetzelfde resultaat. We hebben dus alle mogelijkheden dubbel geteld en komen weer tot 60 manieren.

B-vragen

B1. Nummer één kaartje met '1', twee kaartjes met '2', drie kaartjes met '3', ..., vijftig kaartjes met '50'. Stop al deze kaartjes in een doos en schud ze goed door elkaar. Hoeveel kaartjes moet je ten minste uit de doos pakken om er zeker van te zijn dat je minimaal tien kaartjes met hetzelfde nummer hebt?

Uitwerking In het minst gunstige geval pak je een heleboel kaarten zonder tien dezelfde te hebben. Als je alle kaartjes met 1 t/m 9 erop pakt heb je al 45 nutteloze kaartjes. Van elk van de kaarten met 10 t/m 50 erop kun je er 9 pakken zonder succes. Dat zijn er $41 \cdot 9 = 369$. Je kunt dus $45 + 369 = 414$ kaarten pakken met geen tien dezelfde ertussen. Als je dat doet en nog een kaart trekt, moet dat wel een zijn van 10 t/m 50, dus heb je de tiende. Je moet dus minstens 415 kaarten pakken.

B2. Gegeven is een vierhoek $ABCD$ met zijden $|AB| = 16$, $|BC| = 21$, $|CD| = 2$ en $|DA| = 28$. Verder is AB evenwijdig met CD. Twee lijnen die evenwijdig zijn met AB en CD verdelen vierhoek $ABCD$ in drie gelijkvormige vierhoeken. Bereken de omtrek van de kleinste van die drie vierhoeken.



Uitwerking Noem de snijpunten P, Q, R en S zoals op de afbeelding. Gegeven is dat $PQCD$, $RSQP$ en $ABSR$ gelijkvormig zijn: de ene vierhoek is een vergroting (of verkleining) van de andere. Van deze drie vierhoeken zijn er maar twee bekende lengten, namelijk $|AB|$ en $|CD|$. Maar wegens de gelijkvormigheid weet je dat

$$\frac{|PQ|}{|DC|} = \frac{|RS|}{|PQ|} = \frac{|AB|}{|RS|}.$$

Noem voor het gemak $a = |PQ|$ en $b = |RS|$ en vul $|AB| = 16$ en $|CD| = 2$ in:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{a} = \frac{16}{b}.$$

Uit de eerste gelijkheid volgt $a^2 = 2b$ en uit de tweede $b^2 = 16a$ ofwel $b = 4\sqrt{a}$. Combineer deze twee vergelijkingen. Dan krijg je

$$a^2 = 2b = 2 \cdot 4\sqrt{a} = 8\sqrt{a},$$

ofwel $a^4 = 64a$. Omdat $a \neq 0$ mag je door a delen en geldt $a^3 = 64$, dus $a = 4$. Uit $a^2 = 2b$ volgt $b = 8$.
Nu weet je $|PQ| : |RS| : |AB| = 1 : 2 : 4$ dus ook $|DP| : |PR| : |RA| = 1 : 2 : 4$ en $|CQ| : |QS| : |SB| = 1 : 2 : 4$. Daaruit volgt:

$$|DA| = (1 + 2 + 4) \cdot |DP|,$$

dus $|DP| = \frac{|DA|}{7} = \frac{28}{7} = 4$ en

$$|CB| = (1 + 2 + 4) \cdot |CQ|,$$

dus $|CQ| = \frac{|CB|}{7} = \frac{21}{7} = 3$. Nu is de omtrek van $PQCD$ gelijk aan $|PQ| + |QC| + |CD| + |DP| = 4 + 3 + 2 + 4 = 13$.

B3. Voor elk tweetal positieve gehele getallen a en b definiëren we een bewerking $a \otimes b$ met de volgende drie eigenschappen:

$$a \otimes a = a + 2$$

$$a \otimes b = b \otimes a$$

$$\frac{a \otimes (a + b)}{a \otimes b} = \frac{a + b}{b}$$

Bepaal $8 \otimes 5$.

Uitwerking Op het eerste gezicht lijkt het handig met de eerste eigenschap te beginnen, omdat je daar maar één getal voor nodig hebt. Maar dan moet je wel weten welk getal je daar moet invullen. Bij de derde eigenschap ligt het voor de hand $a = 8$ en $b = 5$ te nemen, maar dan krijg je aan de linker kant $8 \otimes 13$ in de teller en als je dat weer zou invullen zou je nog grotere getallen krijgen en dat schiet niet op. Je weet niet wat $a \otimes b$ is, behalve als $a = b$.

Wat als je nou $a = 5$ en $b = 3$ neemt? Dan heb je $a + b = 8$, dus kun je $8 \otimes 5$ uitdrukken in $5 \otimes 3$. Je weet niet wat dat is, maar 5 en 3 zijn in ieder geval kleinere getallen. Je weet volgens de derde eigenschap

$$\frac{5 \otimes 8}{5 \otimes 3} = \frac{8}{3},$$

dus

$$8 \otimes 5 = 5 \otimes 8 = \frac{8}{3} \cdot (5 \otimes 3) = \frac{8}{3} \cdot (3 \otimes 5).$$

Nu neem je $a = 3$ en $b = 2$, dan krijg je:

$$\frac{3 \otimes 5}{3 \otimes 2} = \frac{5}{2},$$

ofwel $3 \otimes 5 = \frac{5}{2} \cdot (3 \otimes 2)$, dus

$$8 \otimes 5 = \frac{8}{3} \cdot (3 \otimes 5) = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot (3 \otimes 2) = \frac{20}{3} \cdot (2 \otimes 3).$$

De getallen worden steeds kleiner. Nu kun je $a = 2$ en $b = 1$ nemen:

$$\frac{2 \otimes 3}{2 \otimes 1} = \frac{3}{1},$$

ofwel $2 \otimes 3 = 3 \cdot (2 \otimes 1)$, dus

$$8 \otimes 5 = \frac{20}{3} \cdot (2 \otimes 3) = \frac{20}{3} \cdot 3 \cdot (2 \otimes 1) = 20 \cdot (1 \otimes 2).$$

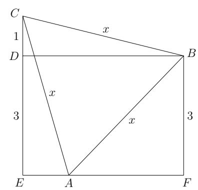
Nu kun je met $a = 1$ en $b = 1$ de laatste stap opschrijven:

$$\frac{1 \otimes 2}{1 \otimes 1} = \frac{2}{1},$$

ofwel $1 \otimes 2 = 2 \cdot (1 \otimes 1) = 2 \cdot (1 + 2) = 6$. Dit laatste volgt uit de eerste eigenschap.

$$8 \otimes 5 = 20 \cdot (1 \otimes 2) = 20 \cdot 6 = 120.$$

B4. Een vlag in de vorm van een gelijkzijdige driehoek is aan twee hoekpunten opgehangen aan de toppen van twee verticale palen. De ene paal heeft een lengte 4 en de andere paal een lengte 3. Verder is gegeven dat het derde hoekpunt van de vlag precies de grond raakt. Bepaal de lengte van de zijde van de vlag.



Uitwerking Definieer de punten A t/m F zoals op het plaatje en noem de zijde van de vlag x. Noem voor het gemak $|EA| = a$ en $|AF| = b$, dan volgt ook meteen $|DB| = a + b$. Er zijn drie rechthoekige driehoeken waarvan x de schuine zijde is, namelijk $\triangle CEA$, $\triangle AFB$ en $\triangle BDC$. In $\triangle CEA$ volgt uit de stelling van Pythagoras: $a^2 + 4^2 = x^2$, dus

$$a = \sqrt{x^2 - 16}.$$

In $\triangle AFB$ geeft de stelling van Pythagoras:

$$b = \sqrt{x^2 - 9}.$$

In $\triangle BDC$ heb je $(a + b)^2 + 1^2 = x^2$ dus

$$\left(\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9}\right)^2 = x^2 - 1.$$

Nu moet je alleen maar heel veel haakjes uitwerken. Je krijgt

$$(x^2 - 16) + 2\sqrt{x^2 - 16} \cdot \sqrt{x^2 - 9} + (x^2 - 9) = x^2 - 1,$$

ofwel

$$2x^2 - 25 + 2\sqrt{(x^2 - 16)(x^2 - 9)} = x^2 - 1.$$

Haal de wortel naar rechts en de rest naar links:

$$x^2 - 24 = -2\sqrt{x^4 - 25x^2 + 144}.$$

Om de wortel weg te krijgen moet je kwadrateren:

$$x^4 - 48x^2 + 576 = 4x^4 - 100x^2 + 576.$$

Haal de vierdemachten naar rechts en de rest naar links:

$$52x^2 = 3x^4.$$

Je kunt beide kanten door x^2 delen, want $x \neq 0$, dus

$$52 = 3x^2.$$

Hieruit volgt $x = \sqrt{\frac{52}{3}}$. Dit is gelijk aan $2\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{39}$.

door: Maarten Roelofsma

3 De eerste ronde 2008

3.1 De opgaven

A-vragen

A1. Alex, Birgit, Cedric, Dion en Ersin schrijven allemaal hun naam op een lootje en stoppen die 5 lootjes in een grote hoed. Daarna trekken ze één voor één een van de lootjes zonder die weer terug te stoppen. Daarbij trekt Birgit het lootje van Alex, Cedric trekt Dions lootje en Dion trekt Ersins lootje. Verder trekt Ersin niet het lootje van Cedric. Wiens lootje trekt Alex? Alex trekt het lootje van:

(A) Alex (B) Birgit (C) Cedric (D) Dion (E) Ersin

A2. In een magisch vierkant zijn de drie rijsommen, de drie kolomsommen en de twee diagonaalsommen aan elkaar gelijk. (Een *rijsom* is de som van de getallen op een rij, etc.) Van het hier afgebeelde 3×3-magisch vierkant zijn drie getallen ingevuld.
Welk getal moet er staan op de plaats van het vraagteken?

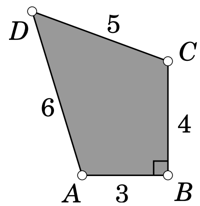
		7
?		
	10	3

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

A3. Als je $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ uitrekent kom je uit op 720. Hoeveel delers heeft het getal 720? (Een *deler* van een getal n is een positief geheel getal waardoor n deelbaar is. Voorbeelden: de delers van 6 zijn 1, 2, 3 en 6; de delers van 11 zijn 1 en 11.)

(A) 6 (B) 8 (C) 20 (D) 30 (E) 36

A4. Van een vierhoek $ABCD$ is gegeven: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|DA| = 6$ en $\angle ABC = 90°$. ($|AB|$ staat voor de lengte van lijnstuk AB, etc.) Hoe groot is de oppervlakte van vierhoek $ABCD$?

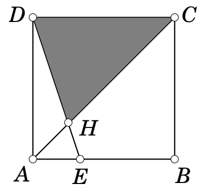


(A) 16 (B) 18 (C) $18\frac{1}{2}$ (D) 20 (E) $6 + 5\sqrt{11}$

A5. Hoeveel getallen van vijf cijfers (zoals 12345 of 78000; het eerste cijfer is nooit 0) zijn er die op een 4 eindigen en door 6 deelbaar zijn?

(A) 1500 (B) 2000 (C) 3000 (D) 7500 (E) 8998

A6. Op de zijde AB van een vierkant $ABCD$ met $|AB| = 3$ ligt een punt E zo dat $|AE| = 1$ en $|EB| = 2$. AC en DE snijden elkaar in het punt H. Hoe groot is de oppervlakte van driehoek CDH?



(A) $\frac{9}{8}$ (B) 2 (C) $\frac{21}{8}$ (D) 3 (E) $\frac{27}{8}$

A7. De 7 letterblokjes $\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}$ worden door elkaar gehutseld. Dan krijg je bijvoorbeeld $\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{G}}$ of $\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}$.
Hoeveel verschillende "woorden" van lengte 7 zijn er in totaal te vormen? (Als *woord* telt elke volgorde van de 7 letters.)

(A) 210 (B) 420 (C) 840 (D) 1260 (E) 5040

A8. Hoeveel verschillende (reële) oplossingen heeft de vergelijking

$$\left((x^2-2)^2-5\right)^2 = 1 \quad ?$$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

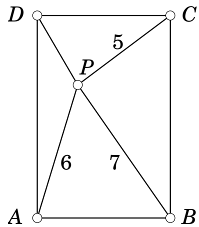
B-vragen

B1. Zowel de rijen als de kolommen van een 8×8-schaakbord zijn genummerd van 1 t/m 8. Op elk veld van het schaakbord wordt een aantal graankorrels gelegd dat gelijk is aan het product van het rijnummer en het kolomnummer.
Hoeveel graankorrels liggen er in totaal op het schaakbord?

B2. Van een 50-tal verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ is de som gelijk aan 2900. Wat is het kleinst mogelijke aantal *even* getallen onder deze 50 getallen?

B3. Voor een getal x geldt dat $x + \frac{1}{x} = 5$. We definiëren $n = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Het blijkt dat n een geheel getal is.
Bereken n. (Schrijf n in gewone decimale notatie.)

B4. Binnen een rechthoek $ABCD$ bevindt zich een punt P met $|AP| = 6$, $|BP| = 7$ en $|CP| = 5$. Hoe lang is lijnstuk DP?



3.2 De uitwerkingen

A-vragen

A1. Alex, Birgit, Cedric, Dion en Ersin schrijven allemaal hun naam op een lootje en stoppen die 5 lootjes in een grote hoed. Daarna trekken ze één voor één een van de lootjes zonder die weer terug te stoppen. Daarbij trekt Birgit het lootje van Alex, Cedric trekt Dions lootje en Dion trekt Ersins lootje. Verder trekt Ersin niet het lootje van Cedric. Wiens lootje trekt Alex? Alex trekt het lootje van:

(A) Alex (B) Birgit (C) Cedric (D) Dion (E) Ersin

Uitwerking Op zich is dit geen moeilijk wiskundig vraagstuk. De kunst is echter om de gegevens uit de tekst op een overzichtelijke manier weer te geven, zodat je de oplossing gemakkelijk kunt vinden. In dit geval is het handig om gebruik te maken van een tabel.

Degene die het lootje trekt	A	B	C	D	E
Wie ze trekken					

We weten dat persoon B persoon A trekt, C persoon D trekt en D persoon E trekt. Dit invullen geeft:

Degene die het lootje trekt	A	B	C	D	E
Wie ze trekken		A	D	E	

Bovendien weten we dat persoon E niet lootje C trekt, maar B en C zijn de enige lootjes die nog over zijn. Hij zal dus persoon B getrokken hebben. Dit betekent dat persoon A het lootje van C getrokken heeft (de rest van de lootjes was immers al verdeeld):

Degene die het lootje trekt	A	B	C	D	E
Wie ze trekken	C	A	D	E	B

Het juiste antwoord is dus antwoord (C): Alex trekt het lootje van Cedric.

A2. In een magisch vierkant zijn de drie rijsommen, de drie kolomsommen en de twee diagonaalsommen aan elkaar gelijk. (Een *rijsom* is de som van de getallen op een rij, etc.) Van het hier afgebeelde 3×3-magisch vierkant zijn drie getallen ingevuld.
Welk getal moet er staan op de plaats van het vraagteken?

A	B	7
C	D	E
F	10	3

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

Uitwerking Bij deze opgave is het belangrijk dat je het probleem zo bewerkt dat je ermee kan rekenen (met lege hokjes kunnen we maar weinig). We geven alle lege vakjes een letter; met letters kunnen we immers goed rekenen. We krijgen het bovenstaande.
Bij deze opgave moet de som van alle 8 drietallen (3 horizontaal, 3 verticaal en

2 diagonaal) gelijk zijn aan elkaar. Met logisch redeneren is het duidelijk waar we moeten beginnen. Het is logisch iets met de rij F, 10, 3 of de kolom 7, E, 3 te doen (daar hebben we immers al 2 vaste waarden). Nu moeten we nog een ander drietal vinden, waarmee we één van deze 2 drietallen kunnen vergelijken. We zoeken dus een drietal met een F of met een E, met zoveel mogelijk vaste waarden. Het enige drietal (met een F of E) dat een vaste waarde heeft, is de diagonaal: F, D, 7. Er moet gelden dat:
$F + D + 7 = F + 10 + 3$, dus
$D + 7 = 13$
$D = 6$
Hetzelfde trucje kun je nog een aantal keren toepassen en zo kan je het vierkant verder helemaal invullen. Het simpelste is de rij C, 6(D), E gelijk te stellen aan de kolom 7, E, 3. We krijgen dan:
$C + 6 + E = 7 + E + 3$, dus:
$C + 6 = 10$ oftewel $C = 4$. Het juiste antwoord is dus (B).

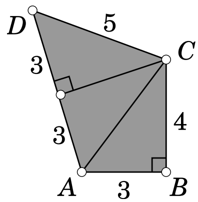
A3. Als je $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ uitrekent kom je uit op 720. Hoeveel delers heeft het getal 720? (Een *deler* van een getal n is een positief geheel getal waardoor n deelbaar is. Voorbeelden: de delers van 6 zijn 1, 2, 3 en 6; de delers van 11 zijn 1 en 11.)

(A) 6 (B) 8 (C) 20 (D) 30 (E) 36

Uitwerking Voor een deler a van 720 moet er gelden: de uitkomst van $\frac{720}{a}$ is een geheel getal. Gaan we 720 nu als het product schrijven van zo klein mogelijke factoren, dan krijgen we:
$720 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = (3 \times 2) \times 5 \times (2 \times 2) \times 3 \times 2.$
Dit zouden we de “bouwsteentjes” van 720 kunnen noemen (deze bouwstenen heten priemgetallen). Een deler a moet uit dezelfde “bouwsteentjes” zijn opgebouwd (anders is $\frac{720}{a}$ niet geheel). Het getal a bevat dus maximaal vier factoren 2, twee factoren 3 en één factor 5. Dit betekent dat je voor het kiezen van het aantal factoren 2 vijf mogelijkheden hebt (0, 1, 2, 3 of 4 factoren 2), voor de factoren 3 drie mogelijkheden (0,1 of 2 factoren 3) en voor de factor 5 twee mogelijkheden (wel of geen factor 5). In totaal zijn er dan $5 \times 3 \times 2 = 30$ mogelijkheden om een deler samen te stellen, dus we krijgen antwoord (D).

Een andere oplossing vinden we als we bedenken dat delers altijd in paren voorkomen: stel dat a een deler is van 720, dan is $\frac{720}{a}$ ook een deler van 720. Een van deze getallen is altijd een 5-voud en de ander juist geen 5-voud (anders zou 720 deelbaar moeten zijn door 25). Er zijn dus evenveel delers die wel een 5-voud zijn als delers die geen 5-voud zijn. Het is dus handig als we alleen de delers tellen die geen 5-voud zijn. Deze delers kunnen we vinden door in de gegeven ontbinding van 720 de factor 5 weg te laten. We willen dus alle delers van $6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$ bepalen. De delers van 144 vind je door 144 op alle mogelijke manieren als product te schrijven:
1×144; 2×72; 3×48; 4×36; 6×24; 8×18; 9×16 en 12×12. Dit zijn in totaal 15 delers, 720 heeft dan $2 \times 15 = 30$ delers.

A4. Van een vierhoek $ABCD$ is gegeven: $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|DA| = 6$ en $\angle ABC = 90°$. ($|AB|$ staat voor de lengte van lijnstuk AB, etc.) Hoe groot is de oppervlakte van vierhoek $ABCD$?



(A) 16 (B) 18 (C) $18\frac{1}{2}$ (D) 20 (E) $6 + 5\sqrt{11}$

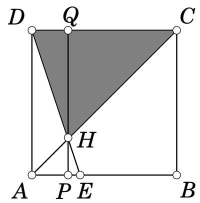
Uitwerking Als je begint aan deze opgave, krijg je te maken met het volgende probleem: hoe bereken ik de oppervlakte van een vierhoek? Daarom is het handig de vierhoek op te splitsen in twee driehoeken (voor driehoeken hebben we formules). In deze vierhoek kan dat op twee manieren, namelijk een lijn van B naar D of een lijn van A naar C. De opsplitsing die nuttig is, is de lijn van A naar C (we houden dan de rechte hoek bij B intact). Met behulp van de stelling van Pythagoras weten we dat $|AC|$ lengte 5 heeft ($|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 9 + 16 = 25$). Driehoek ACD is dus gelijkbenig ($|AC| = |CD|$). Als we nu in deze driehoek de hoogtelijn vanuit C trekken, ontstaan er twee driehoeken (zie de figuur). Deze zijn allebei identiek aan driehoek ABC. We hebben nu in totaal drie gelijke driehoeken waarvan de oppervlakte tezamen gelijk is aan $3 \times \frac{1}{2} \times b \times h = 3 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 18$, dus het gezochte antwoord is (B).

A5. Hoeveel getallen van vijf cijfers (zoals 12345 of 78000; het eerste cijfer is nooit 0) zijn er die op een 4 eindigen en door 6 deelbaar zijn?

(A) 1500 (B) 2000 (C) 3000 (D) 7500 (E) 8998

Uitwerking We zoeken getallen van 5 cijfers die aan twee voorwaarden moeten voldoen: ze zijn deelbaar door 6 en eindigen op een 4. Om een idee te krijgen, kijken we bij een aantal getallen die op een 4 eindigen of ze deelbaar zijn door 6 (voor het krijgen van een idee hoeven dit niet noodzakelijk getallen van 5 cijfers te zijn). We bekijken de volgende getallen: 4 niet, 14 niet, 24 wel, 34 niet, 44 niet, 54 wel, 64 niet, 74 niet, 84 wel.
Je ziet gelijk het volgende patroon: twee keer niet en dan één keer wel. Waarom is dat zo? Het verschil tussen twee keer 'wel' is telkens 30, en 30 zelf is deelbaar door 6. Dus als we bij een getal 30 optellen blijft het wel of niet deelbaar door 6. Tellen we er echter 10 of 20 bij op, dan werkt het trucje juist niet; 10 en 20 zijn zelf immers niet deelbaar door 6. Het patroon 'niet, niet, wel' blijft zich dus herhalen. Van 30 opeenvolgende getallen is er daarom altijd precies één getal dat voldoet aan beide voorwaarden. In totaal hebben we 90000 opeenvolgende getallen. Deze kunnen we in 3000 aaneengesloten stukken van elk 30 opeenvolgende getallen opdelen. Uit het patroon blijkt dat er in elk interval precies één getal aan de voorwaarden voldoet. Er zijn dus 3000 getallen die aan de voorwaarden voldoen en we vinden antwoord (C).

A6. Op de zijde AB van een vierkant $ABCD$ met $|AB| = 3$ ligt een punt E zo dat $|AE| = 1$ en $|EB| = 2$. AC en DE snijden elkaar in het punt H. Hoe groot is de oppervlakte van driehoek CDH?



(A) $\frac{9}{8}$ (B) 2 (C) $\frac{21}{8}$ (D) 3 (E) $\frac{27}{8}$

Uitwerking Voor het berekenen van de oppervlakte van deze driehoek gebruiken we de formule $Opp = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$. Het is in de gevraagde driehoek handig CD als basis te nemen (die afstand kennen we immers al). Het bepalen van de hoogte wordt lastiger, maar als we goed kijken zien we dat de hoogte van driehoek CDH en de hoogte van driehoek AEH (met basis AE) samen 3 zijn. Deze twee driehoeken zijn gelijkvormig (zandloperfiguur). Omdat CD drie keer zo lang is als AE weten we dat de lijnstukken in driehoek CDH drie keer zo lang zijn als die in driehoek AEH. Ook de hoogtelijnen staan dus in de verhouding 3:1. Omdat de hoogte van driehoek CDH (HQ) en de hoogte van driehoek AEH (PH) samen gelijk is aan 3, is de hoogte van driehoek CDH $\frac{3}{4}$ deel van 3. HQ is gelijk aan $\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$. De oppervlakte van driehoek CDH is dan: $\frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$. Antwoord (E).

A7. De 7 letterblokjes $\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}$ worden door elkaar gehutseld. Dan krijg je bijvoorbeeld $\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{G}}$ of $\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}\boxed{\texttt{G}}\boxed{\texttt{E}}\boxed{\texttt{N}}$.
Hoeveel verschillende "woorden" van lengte 7 zijn er in totaal te vormen? (Als *woord* telt elke volgorde van de 7 letters.)

(A) 210 (B) 420 (C) 840 (D) 1260 (E) 5040

Uitwerking Stel dat we 7 verschillende blokjes hebben, dan hebben we voor het neerleggen van het eerste blokje 7 mogelijkheden, voor het tweede blokje 6, enzovoort. Dan kunnen we in totaal $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ woorden maken (dit noteren we ook wel met 7!). Alleen is in dit geval het probleem dat niet alle letters verschillend zijn (dus alle woorden zijn ook niet verschillend). Allereerst kijken we naar de G. In het woord komt de G twee keer voor. We kunnen deze twee blokjes op 2! $(= 2 \times 1)$ manieren neerleggen zonder het woord te veranderen. We tellen elke oplossing dus 2! keer. Op dezelfde wijze geldt dat we door de N elke oplossing ook 2! keer tellen en door de E zelfs 3! keer. We tellen elke oplossing dus $2! \times 2! \times 3! = 2 \times 2 \times 6 = 24$ keer. Het aantal verschillende oplossingen is dan $7!/24 = 5040/24 = 210$. Het juiste antwoord is dus (A).

A8. Hoeveel verschillende (reële) oplossingen heeft de vergelijking

$$\left((x^2-2)^2-5\right)^2 = 1 \quad ?$$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Uitwerking Als eerste is het belangrijk dat je weet hoe je een kwadraat wegwerkt. Aan de hand van een voorbeeld laat ik zien hoe dat werkt. Stel $p^2 = 100$; door aan beide kanten de wortel te nemen krijgen we: $p = 10$. Hiermee zijn we er echter nog niet. De grafiek $q = p^2$ is een symmetrische functie, dit betekent dat als $p = 10$ een oplossing is, $p = -10$ ook een oplossing is. Algemeen geldt dus: als $p^2 = q$, dan geldt of $p = -\sqrt{q}$ of $p = \sqrt{q}$. Vanaf nu noem ik deze stap *kwadraatwegwerken*.

Deze vergelijking ziet er op het eerste gezicht niet gemakkelijk uit, maar dat valt reuze mee. Aan de linkerkant staat namelijk een kwadraat en aan de rechterkant een los getal. Dit betekent dat we kunnen kwadraatwegwerken.

We houden dan de volgende twee oplossingen over.

$$(x^2-2)^2-5=1 \quad \text{of} \quad (x^2-2)^2-5=-1.$$

Nu aan beide kanten 5 optellen:

$$(x^2-2)^2=6 \quad \text{of} \quad (x^2-2)^2=4.$$

Bij beide vergelijkingen weer kwadraatwegwerken.

$$x^2-2=\sqrt{6} \quad \text{of} \quad x^2-2=-\sqrt{6} \quad \text{of} \quad x^2-2=2 \quad \text{of} \quad x^2-2=-2.$$

Ervoor zorgen dat aan de linkerkant een kwadraat staat en aan de rechterkant een los getal, nu kunnen we weer kwadraatwegwerken.

$$x^2=\sqrt{6}+2 \quad \text{of} \quad x^2=-\sqrt{6}+2 \quad \text{of} \quad x^2=4 \quad \text{of} \quad x^2=0.$$

De eerste en derde vergelijking hebben een los getal groter dan 0 en hebben dus ieder twee oplossingen. De tweede vergelijking heeft een negatief los getal en heeft dus geen oplossing. Vergelijking 4 heeft precies één oplossing ($x=0$). In totaal zijn er dus $2+0+2+1=5$ oplossingen voor de vergelijking, dus we krijgen antwoord (B).

B-vragen

B1. Zowel de rijen als de kolommen van een 8×8-schaakbord zijn genummerd van 1 t/m 8. Op elk veld van het schaakbord wordt een aantal graankorrels gelegd dat gelijk is aan het product van het rijnummer en het kolomnummer.
Hoeveel graankorrels liggen er in totaal op het schaakbord?

Uitwerking Bij dit soort opgaven is het om een idee te krijgen altijd handig de eerste waarden in te vullen of de vraag toe te passen op een kleinere variant (bijvoorbeeld een 4 bij 4 bord). Hieronder zijn de eerste waarden ingevuld.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9					
4								
5								
6								
7								
8								

Je kan natuurlijk alles invullen en optellen, maar dat is geen mooie oplossing, kost vaak meer tijd en geeft bovendien een grotere kans op rekenfouten. In de tabel valt direct op dat alle getallen in rij 2 ook twee keer zo groot zijn als in rij 1. In rij 3 zijn de getallen drie keer zo groot als in rij 1, enzovoort. De totale som van het vierkant is niets anders dan de som van de 8 rijen. Dat betekent het volgende:
Som (bord) = Som (rij 1) + Som (rij 2) + $\ldots$ + Som (rij 8).
En dat is weer gelijk aan:
Som (rij 1) + 2 $\times$ Som (rij 1) + $\ldots$ + 8 $\times$ Som (rij 1) =
(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) $\times$ Som (rij 1).
En Som (rij 1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.
Dus Som (bord) = 36 $\times$ 36 = 1296.

B2. Van een 50-tal verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ is de som gelijk aan 2900. Wat is het kleinst mogelijke aantal *even* getallen onder deze 50 getallen?

Uitwerking De verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ bestaat uit 50 even en 50 oneven getallen. Eerst stellen we vast wat de som is als we de 50 oneven getallen kiezen (dan is het aantal even getallen minimaal). De som is dan:
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 97 + 99$, dat is veel werk om op te tellen. We kunnen de getallen echter in groepjes van 2 plaatsen:
$(1+99)+(3+97)+...+(49+51)$, nu hebben we 25 groepjes van 100 en de som daarvan is 2500. We willen echter een verzameling met som 2900. We gaan net zolang twee oneven getallen vervangen door twee even getallen totdat we wel op 2900 kunnen uitkomen (als we slechts één oneven getal door één even getal vervangen wordt de som van de verzameling oneven). We vervangen de kleinste oneven getallen telkens door de grootste even getallen (zo komt de som zo snel mogelijk bij 2900). Eerst vervangen we de 1 door de 100 en de 3 door de 98, dat levert som +194. Het tekort is dan nog 206 (400 − 194). Vervolgens:
5 door 96 en 7 door 94 levert +178, dus nog 28 tekort
Door nu nog een tweetal cijfers te vervangen kunnen we een som van 2900 of groter vinden. Vervangen we de 9 door 10 en 11 door 38 dan levert dat +28 op en dat geeft som 2900. Er zijn dus minimaal 6 even getallen in een verzameling met som 2900.

B3. Voor een getal x geldt dat $x + \frac{1}{x} = 5$. We definiëren $n = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Het blijkt dat n een geheel getal is.
Bereken n. (Schrijf n in gewone decimale notatie.)

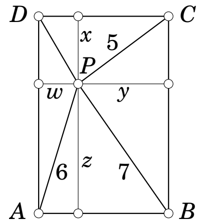
Uitwerking Bij dit soort opgaven is het vaak lastig om direct een oplossing te vinden. Vaak zul je het één en ander moeten proberen, totdat je een juiste manier hebt gevonden. Wees dus vooral niet bang om eens iets te proberen waarvan je niet weet of het gaat werken. Het proberen is juist heel belangrijk bij het oplossen van dergelijke problemen.
De linkerkant van de vergelijking $x + \frac{1}{x} = 5$ lijkt al veel op de uitdrukking voor n. Het verschil zit 'm in de derdemachten. Om de vergelijkingen aan elkaar gelijk te krijgen, doen we de eerste vergelijking tot de macht 3 (dit is nou typisch een stap waarvan je echt niet weet of het gaat werken. Bij het machtsverheffen krijg je namelijk nog allemaal bijproducten waarvan je niet weet of je er iets mee kunt). We krijgen dan:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 &= 5^3 \\
\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) &= 125 \\
x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} &= 125 \\
x^3 + 3 \cdot x + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} &= 125
\end{aligned}$$

We gaan er nu voor zorgen dat de linkerkant gelijk wordt aan n:

$$\begin{aligned}
x^3 + \frac{1}{x^3} &= 125 - \left(3 \cdot x + 3 \cdot \frac{1}{x}\right) \\
&= 125 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\
&= 125 - 3 \cdot 5 = 110
\end{aligned}$$

We concluderen dat $n = 110$.



B4. Binnen een rechthoek $ABCD$ bevindt zich een punt P met $|AP| = 6$, $|BP| = 7$ en $|CP| = 5$. Hoe lang is lijnstuk DP?

Uitwerking Met het oorspronkelijke plaatje kun je weinig beginnen. Je moet dus hulplijnen intekenen. In dit geval moet je twee lijnen door P trekken, één evenwijdig aan AB en de ander evenwijdig aan BC. Geef de lengtes van de lijnstukken de letters x, y, z, w. Dan weten we met Pythagoras:
(1) $x^2 + y^2 = 25$;
(2) $y^2 + z^2 = 49$;
(3) $z^2 + w^2 = 36$;
(4) $w^2 + x^2 = |DP|^2$.
Als we naar de vergelijkingen kijken, dan zien we dat de linkerkant van (1) en (3) samen gelijk is aan die van (2) en (4). Datzelfde moet dan ook gelden voor de rechterkant van de vergelijkingen, dus:
$25+36 = 49+|DP|^2$, dus $|DP|^2 = 12$. Hieruit volgt dat $|DP| = \sqrt{12} = 2 \times \sqrt{3}$.