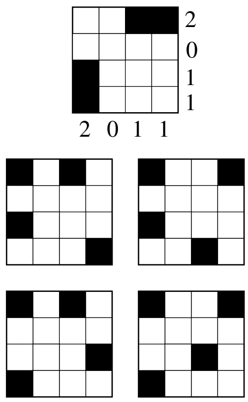
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

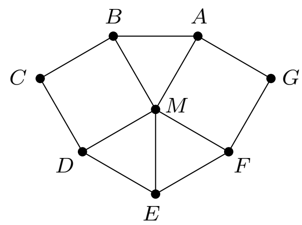
vrijdag 4 februari 2011

Uitwerkingen



A1. D) 5 Merk eerst op dat alle vakjes in de tweede rij en in de tweede kolom wit gekleurd moeten zijn. We bekijken twee gevallen, afhankelijk van de kleur van het vakje linksboven.
Als dit vakje wit is, moeten de laatste twee vakjes in de eerste rij en kolom zwart zijn. Dit legt de kleuring vast. Zie de bovenste figuur.
Als dit vakje zwart is, moet in de eerste kolom en in de eerste rij elk nog één vakje zwart gekleurd worden. Voor elk van de $2 \times 2 = 4$ keuzes is er precies één oplossing. Er is dan namelijk nog één rij en één kolom die een zwart vakje mist. Het vakje in die rij en kolom moet dus zwart worden en de rest wit, zie de onderste vier figuren.

A2. C) juni Het jaartal van de gezochte datum begint met een cijfer dat 2 of hoger is. We zoeken de eerste datum waarvan het jaartal met een 2 begint en alle acht de cijfers verschillend zijn. Als die bestaat is het de gezochte datum.
Voor de maand vallen 11 (twee dezelfde cijfers) en 12 (cijfer 2 is al gebruikt in het jaartal) af. De maand (01 t/m 10) bevat dus het cijfer 0. De dag begint daarom of met een 1 of een 3. In het tweede geval is het de 31-ste, want de 0 is al bezet. In beide gevallen zit de 1 in de dag. Nu de 0 en 1 al bezet zijn, is het kleinst mogelijke jaartal 2345. De kleinst mogelijke maand die we dan nog kunnen kiezen is 06, oftewel juni, met als dag de 17e. We zien dat de gevonden datum 17-06-2345 inderdaad met acht verschillende cijfers wordt geschreven.



A3. B) $8 + 3\sqrt{3}$ De zevenhoek kan worden opgedeeld in twee vierkanten en drie gelijkzijdige driehoeken, allemaal met zijden van lengte 2. We weten dat de oppervlakte van zo'n vierkant gelijk is aan 4. Met Pythagoras kunnen we de hoogte van bijvoorbeeld driehoek ABM berekenen en we vinden dan $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$. De oppervlakte van de driehoek is dan $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. De totale oppervlakte van de zevenhoek is dus $2 \cdot 4 + 3 \cdot \sqrt{3} = 8 + 3\sqrt{3}$.

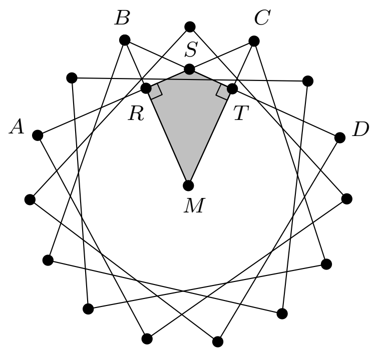
A4. A) alleen Aline Aangezien de voorspelling van Bram fout was, heeft Bram minstens zes vragen goed. De voorspelling van Aline was ook fout, zodat Bram hoogstens één vraag meer goed heeft dan Aline. Aline heeft dus minstens vijf vragen goed. Omdat de voorspelling van Cas fout was, heeft hij meer vragen goed dan Aline, dus minstens zes. Aline kan niet meer dan vijf vragen goed hebben. Immers, dan zou Cas minstens zeven vragen goed hebben en zijn er in totaal minstens $6 + 6 + 7 = 19$ vragen goed, zoals de docent (fout) voorspelde. We concluderen dat Aline vijf vragen goed heeft. Aangezien de andere twee minstens zes vragen goed hebben, heeft Aline het kleinste aantal vragen goed.

A5. C) 62 Jaap kan zeker 62 getallen opschrijven, bijvoorbeeld de getallen 1 tot en met 62 (want $62 + 61 < 125$). Meer dan 62 getallen kan Jaap niet opschrijven. Immers, de getallen 25 tot en met 100 kun je opdelen in paren die samen steeds optellen tot 125: $25 + 100 = 125$, $26 + 99 = 125$, en zo verder tot en met $62 + 63 = 125$. Van elk van die 38 paren moet hij dus minstens één getal missen. In totaal kan hij daarom niet meer dan $100 - 38 = 62$ getallen opschrijven.

A6. B) 1 Door met een staartdeling $a = 11\cdots 11$ (2011 enen) te gaan delen door 37, valt al gauw op dat 111 deelbaar is door 37. Dat feit gaan we gebruiken. We zien nu namelijk dat het getal $1110\cdots 0$ deelbaar is door 37, ongeacht het aantal nullen aan het eind. In het bijzonder zijn de volgende getallen deelbaar door 37: $1110\cdots 0$ (2008 nullen), $1110\cdots 0$ (2005 nullen), $1110\cdots 0$ (2002 nullen), en zo verder tot 1110 (1 nul). De som van deze getallen is $1\ldots 10$ (2010 enen) en is dus ook deelbaar door 37. De rest van a bij deling door 37 is dus gelijk aan 1, want $a-1$ is deelbaar door 37.

A7. C) 35 Na 140 seconden heeft Anne 7 rondjes afgelegd en Bob 5. De voorsprong van Anne is op dat moment twee hele rondjes. Na $\frac{140}{4} = 35$ seconden loopt Anne een half rondje voor. Dat is precies de eerste keer dat zij zo ver mogelijk van Bob verwijderd is.

A8. B) 132° Noem het middelpunt van de vijftienhoek M en het snijpunt van AC en BD punt S (zie de figuur). In vierhoek $MRST$ zien we dat $\angle MRS = 90°$ en $\angle STM = 90°$. Verder zien we dat $\angle TMR = \frac{2}{15}\cdot 360° = 48°$. De som van de hoeken van een vierhoek is 360°, dus geldt: $\angle RST = 360° - 2\cdot 90° - 48° = 132°$. Merk op dat $\angle RST$ en $\angle BSC$ overstaande hoeken zijn. De gevraagde hoek is dus ook 132°.



B1. -1 Gegeven is dat $x = \dfrac{1}{1+x}$. We zien dat $x \neq 0$, want $0 \neq \frac{1}{1}$. We kunnen dus links en rechts de breuk omkeren. Dit geeft $\dfrac{1}{x} = 1 + x$. Hieruit volgt $x - \dfrac{1}{x} = x - (1+x) = -1$.

B2. 20 Bekijk drie roltrappen naast elkaar: de eerste gaat omhoog, de tweede staat stil en de derde gaat naar beneden. Als Dion de eerste trap omhoog neemt, is hij na 12 stappen boven. Raymond, die omhoog gaat op de derde trap doet er 60 stappen over en is na 12 stappen dus pas op $\frac{1}{5}$. Als een derde persoon (zeg Julian), de middelste trap neemt (ook met hetzelfde tempo), is hij na 12 stappen precies tussen Dion en Raymond in: op $(\frac{5}{5}+\frac{1}{5})/2 = \frac{3}{5}$ van de trap. Hij heeft dus $\frac{5}{3}\cdot 12 = 20$ stappen nodig om boven te komen.

B3. 120 Noem de oudste padvinder A. Er zijn 5 mogelijkheden om voor hem een partner B te vinden voor de eerste dag. Vervolgens zijn er 4 mogelijke partners C voor B op de tweede dag, want hij mag niet opnieuw met A gaan. Voor C zijn er nog 3 mogelijke partners D voor de eerste dag, want hij mag niet tweemaal met B, en A is al bezet. Voor D zijn er daarna nog 2 mogelijke partners E voor de tweede dag, want B en C zijn al bezet en A kan zijn partner niet zijn omdat er dan twee padvinders overblijven die op beide dagen een paar vormen. Ten slotte is er nog 1 padvinder over die geen keuze heeft en op de eerste dag met E meegaat en op de tweede dag met A. In totaal zijn er dus $5\times 4\times 3\times 2 = 120$ mogelijkheden.

B4. $\frac{3}{8}$ Bekijk de ingeschreven cirkel. Noem zijn middelpunt O en de lengte van zijn straal r. Het raakpunt aan AB noemen we M en het raakpunt aan boog BC noemen we R.
De drie punten A, O en R liggen op een lijn, zodat $|AO| = |AR| - |OR| = 1 - r$. Verder geldt $|OM| = r$ en $|AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}$. De stelling van Pythagoras geeft $|AM|^2 + |OM|^2 = |AO|^2$ en dus $\frac{1}{4} + r^2 = (1-r)^2 = r^2 - 2r + 1$. Hieruit volgt dat $2r = \frac{3}{4}$ en dus $r = \frac{3}{8}$.