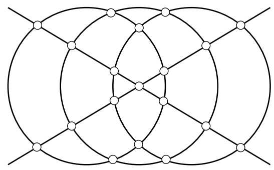
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 29 januari 2010

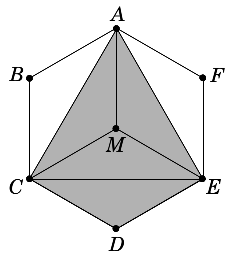
Uitwerkingen

A1. D) 19 Twee cirkels snijden elkaar in hoogstens 2 punten, een cirkel en een lijn snijden elkaar in hoogstens 2 punten en twee lijnen snijden elkaar in hoogstens 1 punt. Er kunnen dus niet meer dan $6+6+6+1 = 19$ snijpunten zijn. Dat dit aantal ook kan voorkomen, zie je hiernaast.



A2. B) 22 De mogelijke eindscores zijn precies de oneven getallen $-21, -19, \ldots, 19, 21$. Dat alleen oneven scores mogelijk zijn zie je als volgt. Alle opgaven goed levert een score van 21 op. Voor iedere fout beantwoorde vraag gaat er een even aantal punten van deze 21 punten af, zodat de score oneven blijft.
Dat alle oneven scores tussen -21 en 21 ook mogelijk zijn, zie je als volgt. Door geen of precies één opgave fout te beantwoorden, kun je scores $21, 19, 17, 15, 13, 11$ en 9 halen. Fout beantwoorden van vraag 6 en een van de eerste vier opgaven levert $7, 5, 3$ of 1 punt op. Door juist hoogstens één opgave goed te maken of alleen opgave 6 en een van de eerste vier opgaven, krijg je scores $-21, -19, \ldots, -1$.

A3. B) $\frac{2}{3}$ Verbind het middelpunt M met A, C en E. Verbind ook C met E. Zo wordt de zeshoek in zes gelijke driehoeken verdeeld, waarvan er 4 samen de vlieger vormen.



A4. B) 37 Na drie ronden heeft iedereen 1 fiche verloren en zijn er 3 in de pot beland. Na $12 \cdot 3$ ronden hebben de spelers respectievelijk 1, 2 en 3 fiches over en zitten er 36 fiches in de pot. In de volgende ronde komt daar nog 1 fiche bij en eindigt het spel.

A5. A) 1 Het product van twee getallen die eindigen op een 1, eindigt zelf ook op een 1. Omdat het laatste cijfer van $7^4 = 2401$ gelijk is aan 1, geldt dat dus ook voor iedere macht van 7^4. In het bijzonder is het laatste cijfer van $((((7^6)^5)^4)^3)^2 = 7^{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = (7^4)^{180}$ gelijk aan 1.

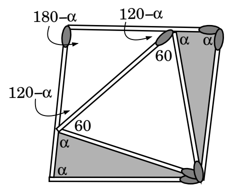
A6. B) 4 Stel $a = (\sqrt{2}+1)^7$ en $b = (\sqrt{2}-1)^7$. Dan is de gegeven uitdrukking gelijk aan

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab = 4(\sqrt{2}+1)^7(\sqrt{2}-1)^7 = 4((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1))^7 = 4 \cdot 1^7 = 4.$$

A7. B) 1467 Na 9 kilometer verspringt het tweede wieltje van rechts. Nadat deze negenmaal is versprongen, dus na $9 \cdot 9$ kilometer, verspringt het derde wieltje van rechts. Na $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ kilometer verspringt het vierde wieltje van rechts. Dus in de stand 002010 is het aantal afgelegde kilometers gelijk aan $2 \cdot 729 + 1 \cdot 9 = 1467$.

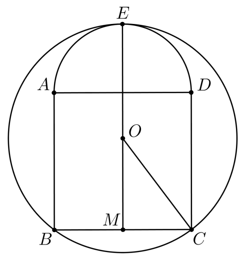
A8. E) 21 posities rechts van Piet Van de 6 kortsten, is Piet de langste. Er zijn dus minstens 5 mensen korter dan Piet. Jan is de kortste van de 6 langsten, dus zijn er minstens 5 mensen langer dan Jan. Jan kan daarom niet 21 posities rechts van Piet staan, want dan zouden er van links naar rechts minstens $5 + 1 + 20 + 1 + 5 = 32$ mensen naast elkaar staan.
Alle andere posities zijn wel mogelijk. Hier controleren we dit alleen voor antwoord C: Jan en Piet staan naast elkaar. Nummer de mensen van klein naar groot van 1 tot en met 30. Zet nu personen $1, 2, 3, 4$ en 10 in een rij en zet in elk van de andere rijen één van de personen $5, 6, 7, 8$ en 9. De rest mag willekeurig verdeeld worden over de resterende posities. De kortsten van de rijen zijn nu $1, 5, 6, 7, 8, 9$, dus Piet is nummer 9. Jan is nummer 10, want van zijn rij is hij de langste en in alle andere rijen staat iemand met een nummer groter dan 10.

B1. 100 De buitenste vier lucifers vormen een parallellogram. De vier basishoeken van de twee aangegeven gelijkbenige driehoeken zijn daarom allemaal gelijk, zeg α en gelijk aan 180 graden minus de gevraagde hoek. De drie lucifers in het midden vormen een gelijkzijdige driehoek (met hoeken van 60 graden). De som van de hoeken van een driehoek is 180 graden, dus $(180 - \alpha) + 2(120 - \alpha) = 180$. We vinden $\alpha = 80$ zodat de gevraagde hoek gelijk is aan 100 graden.



B2. 4 Dat 2216 bij deling door a rest 29 geeft, betekent precies dat $2216 - 29 = 2187$ deelbaar is door a en dat a groter is dan 29 (de rest is altijd kleiner dan de deler a). De delers van $2187 = 3^7$ die groter zijn dan 29 zijn $81, 243, 729$ en 2187. Er zijn dus 4 mogelijkheden in totaal.

B3. $\frac{5}{6}$ Noem het middelpunt van de omgeschreven cirkel O, het raakpunt met de kleine cirkel E en geef het midden van BC aan met M. Wegens de stelling van Pythagoras geldt dat $|OC|^2 = |MC|^2 + |OM|^2$. Omdat $|OM| = |EM| - |OE| = \frac{3}{2} - |OC|$ volgt hieruit dat $|OC|^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2} - |OC|)^2$. Oplossen van deze vergelijking geeft $|OC| = \frac{5}{6}$.



B4. 5185 We nummeren de rijen van boven naar onder 0 tot en met 27 en de kolommen van links naar rechts 0 tot en met 36. Bekijk het vakje in rij r en kolom k. Het rode getal is hier $1 + k + 37r$ en het groene getal is $1 + r + 28k$. Deze twee getallen zijn aan elkaar gelijk precies wanneer $36r = 27k$ oftewel als $4r = 3k$. De oplossingen krijg je door voor r de drievouden $0, 3, \ldots, 27$ te nemen en voor k de bijbehorende viervouden $0, 4, \ldots, 36$. De bijbehorende gekleurde getallen zijn $1, 1 + 115, 1 + 2 \cdot 115, \ldots, 1 + 9 \cdot 115$. Optellen van deze tien getallen geeft het antwoord: $(1 + (1 + 9 \cdot 115)) \cdot 5 = 5185$.