Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 30 januari 2009

Uitwerkingen

A1. Ella scoort 60% goed bij een toets van 25 vragen, 70% goed bij een toets van 30 vragen en 80% goed bij een toets van 45 vragen. Als de toetsen worden samengevoegd tot één toets met 100 vragen, wat is dan haar score voor die toets van 100 vragen? (C) 72%

Oplossing 60% van 25 is 15; 70% van 30 is 21; en 80% van 45 is 36. Ze had dus in totaal 15+21+36 = 72 vragen goed van de 100. □

A2. Voor hoeveel van de gehele getallen 10 tot en met 99 geldt dat de som van de cijfers gelijk is aan het kwadraat van een geheel getal? (Een voorbeeld is het getal 27 met som van de cijfers $2 + 7 = 9 = 3^2$.) (E) 17

Oplossing We kijken hoeveel van de getallen cijfersom 1, 2, etc. hebben. Er is 1 getal met som 1 (namelijk 10); er zijn er 2 met som 2 (namelijk 20 en 11); etc.; 9 met som 9 (namelijk 90, 81, . . . , 18); ook 9 met som 10 (namelijk 91,82, . . . , 19); etc. tot en met 1 met som 18 (namelijk 99); zie tabel. De som is een kwadraat (d.w.z. 1, 4, 9 of 16) voor $1 + 4 + 9 + 3 = 17$ van de 90 getallen.

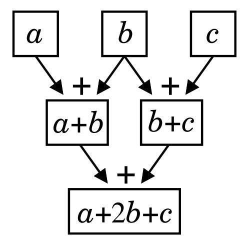
som:	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	**16**	17	18
aantal:	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**	9	8	7	6	5	4	**3**	2	1

□

A3. Ronald gooit met drie dobbelstenen. Die zien er net zo uit als gewone dobbelstenen, alleen staan er op de zes zijvlakken andere getallen. Op de eerste dobbelsteen staan de getallen: 1, 1, 2, 2, 3 en 3. Op de tweede dobbelsteen staan de getallen: 2, 2, 4, 4, 6 en 6. En op de derde dobbelsteen staan de getallen: 1, 1, 3, 3, 5 en 5. Hij telt de drie getallen die hij gooit bij elkaar op. Hoe groot is de kans dat het resultaat een oneven getal is? (B) $\frac{1}{3}$

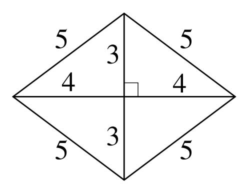
Oplossing De tweede dobbelsteen geeft altijd een even getal en de derde dobbelsteen altijd een oneven getal. De vraag is dus eigenlijk hoe groot de kans is dat de eerste dobbelsteen op een *even* getal valt. Dat is in 2 van de 6 gevallen, dus met kans $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. □

A4. Drie verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ worden in de bovenste drie vierkantjes geplaatst van de figuur hiernaast. Vervolgens worden de getallen opgeteld volgens het aangegeven schema. Noem het grootst mogelijke getal dat in het onderste vierkantje kan komen Max en het kleinst mogelijke getal dat in het onderste vierkantje kan komen Min. Wat is de waarde van Max − Min? (D) 26



Oplossing Als we a, b en c in de bovenste drie vierkantjes plaatsen, is de uitkomst $a + 2b + c$. De grootste uitkomst krijgen we door voor b en daarna voor a en c zo groot mogelijke getallen te nemen. $b = 9$, $a = 8$ en $c = 7$ geeft uitkomst 33. De kleinste uitkomst krijgen we juist door voor b en daarna voor a en c zo klein mogelijke getallen te nemen. $b = 1$, $a = 2$ en $c = 3$ geeft uitkomst 7. Het verschil is $33-7 = 26$. □

A5. De lengtes van de diagonalen van een ruit hebben een verhouding 3 : 4. (Een ruit is een vierhoek met vier zijden die even lang zijn.) De som van de lengtes van de diagonalen is 56. Hoe groot is de omtrek van de ruit? (A) 80

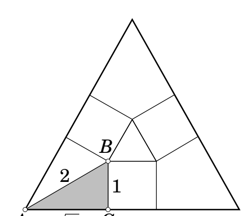


Oplossing De diagonalen zijn $\frac{3}{7} \cdot 56 = 24$ en $\frac{4}{7} \cdot 56 = 32$. De halve diagonalen zijn dus 12 ($= 4 \cdot 3$) en 16 ($= 4 \cdot 4$). De ruit is dus 4 keer zo groot als de ruit in de figuur, die is opgebouwd uit vier 3-4-5-driehoeken. De zijde is in werkelijkheid daarom $4 \cdot 5 = 20$ en de omtrek derhalve $4 \cdot 20 = 80$. □

A6. Wouter gaat lopend van zijn huis naar zijn sportclub. Hij had ook zijn racefiets kunnen pakken; daarmee gaat de tocht zeven keer zo snel. Maar die liet hij thuis staan. Na 1 km is hij op een punt aangekomen dat het in tijd niets uitmaakt of hij verder doorloopt of juist naar huis terugloopt om alsnog met zijn racefiets te gaan. Hoeveel km is hij op dat moment nog verwijderd van zijn sportclub? (E) $\frac{4}{3}$

Oplossing De tijd die Wouter over de eerste kilometer gedaan heeft, noemen we voor het gemak een 'kwartier'; dat is wellicht meer of minder dan 15 minuten, maar het zal er niet toe blijken te doen. Noem x de gevraagde afstand. Hij is dus al een 'kwartier' aan het lopen over die ene km. Doorlopen kost hem dan x 'kwartier'. Teruggaan naar huis en dan op de fiets kost eerst weer 1 'kwartier' lopen en dan $\frac{1+x}{7}$ 'kwartier' fietsen; de fiets gaat immers 7 keer zo snel. Dan moet dus wel $x = 1 + \frac{1+x}{7}$, dus $7x = 7 + (1 + x)$, oftewel $6x = 8$. Conclusie: $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. □

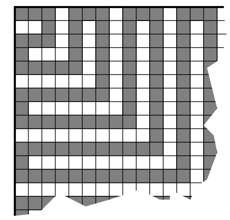
A7. Op de zijden van een gelijkzijdige driehoek worden drie vierkanten getekend. De zijden van de vierkanten die evenwijdig zijn met de zijden van de driehoek worden verlengd tot ze elkaar snijden. De drie snijpunten vormen weer een gelijkzijdige driehoek. De lengte van de zijde van de oorspronkelijke driehoek is 1. Wat is de lengte van de zijde van de grote gelijkzijdige driehoek? (D) $1 + 2\sqrt{3}$



Oplossing In $\triangle ABC$ is $\angle A$ de helft van 60°, dus 30°. Verder is $\angle C$ recht, dus $\triangle ABC$ is een 30°-60°-90°-driehoek met $|BC| = 1$. Het is dus de helft van een gelijkzijdige driehoek met lengte van de zijden 2: $|AB| = 2$. De lengte van AC berekenen we nu met Pythagoras: $|AC| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Dus de gevraagde lengte is $\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}$. □

A8. Bekijk alle getallen van vier cijfers waarin elk van de cijfers 3, 4, 6 en 7 precies eenmaal voorkomt. Hoeveel van deze getallen zijn deelbaar door 44? (A) 2

Oplossing Stel dat het getal n bestaande uit de cijfers a, b, c en d ($n = 1000a + 100b + 10c + d$) voldoet, dus deelbaar is door 44. Het is dan zeker deelbaar door 11. Omdat $m = 1001a + 99b + 11c = 11(91a + 9b + c)$ ook een 11-voud is, moet $m - n$ dat ook zijn, dus $m - n = a - b + c - d$ moet een 11-voud zijn. Maar dit is maximaal de twee hoogste min de twee laagste (dus $13 - 7 = 6$) en minimaal -6, dus het moet wel 0 zijn. Dus $a + c = b + d$. En omdat de cijfers samen 20 zijn, geldt dus $a + c = b + d = 10$.
Stel $d = 4$, dan $b = 6$ en we krijgen 3674 en 7634 die echter beide niet voldoen (want 74 en 34 zijn niet deelbaar door 4). Stel $d = 6$, dan $b = 4$ en we krijgen 3476 en 7436 die allebei juist wel voldoen. Andere opties voor d zijn er niet, want d moet even zijn. Dat zijn in totaal 2 oplossingen.
Alternatieve oplossing Ga de 24 mogelijkheden langs, of de 12 even mogelijkheden, of de 6 viervouden. □



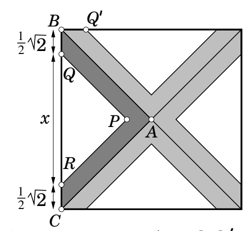
B1. Op een vel papier staat een rooster van 101 bij 101 witte vierkantjes. Er is een slang gevormd door vierkantjes grijs te kleuren zoals in bijgaande figuur. De slang begint linksboven en loopt door tot hij niet verder kan. Slechts een deel van het rooster is afgebeeld. Hoeveel vierkantjes zijn er in totaal grijs gekleurd in het volledige rooster van 101 bij 101 vierkantjes? 5201

Oplossing We kunnen de figuur van 101^2 vierkantjes als volgt opgebouwd denken. Eerst linksboven één vierkantje, dan twee L-vormige stukjes, één van drie vierkantjes (met één grijs vierkantje) en één van vijf vierkantjes (alle vijf grijs) daaromheen. Dan weer twee L-vormige stukjes, één van zeven vierkantjes (waarvan één grijs) en één van negen vierkantjes (alle negen grijs), en zo verder. Van de laatste twee L-vormige stukjes bestaat het eerste uit 199 vierkantjes (waarvan één grijs) en het tweede uit 201 vierkantjes (allemaal grijs). In totaal bekijken we 50 maal twee L-vormige stukjes. Het aantal grijze vierkantjes dat we tellen is $1+(1+5)+(1+9)+(1+13)+\ldots+(1+201) = 1+(6+10+14+\ldots+202) = 1+\frac{1}{2}\cdot 50\cdot(6+202) = 5201$.
Alternatieve oplossing Per twee van deze L-vormige stukjes zijn er 4 grijze vierkantjes meer dan witte vierkantjes. Er zijn dus $50 \cdot 4 = 200$ grijze vierkantjes meer dan witte vierkantjes van de $101^2 - 1 = 10200$ vierkantjes in de 100 L-vormige stukjes in totaal, dus dat gaat om 5000 witte en 5200 grijze vierkantjes. Met het vierkantje linksboven erbij, zijn er dus in totaal 5201 grijze vierkantjes. □

B2. Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999\ldots99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal? 4017

$$\boxed{\underbrace{99999\ldots99999}_{2009\times}}$$

Oplossing $9^3 = 729$; $99^3 = 970299$; $999^3 = 997002999$. Het lijkt erop dat in het algemeen de derde macht van het getal n bestaande uit k negens er als volgt uit ziet: eerst $k-1$ negens; dan een 7; dan $k-1$ nullen; dan een 2; en ten slotte k negens. Om dat te bewijzen, schrijven we n als $10^k - 1$. Inderdaad: $(10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3\cdot 10^{2k} + 3\cdot 10^k - 1 = 10^{2k}(10^k - 3) + (3\cdot 10^k - 1)$. Het getal $10^k - 3$ kun je uitschrijven als $999\ldots997$ met $k-1$ negens. Vermenigvuldigd met 10^{2k} levert dat een getal met $2k$ nullen op het eind. Als we daar $3\cdot 10^k - 1$ bij optellen, worden de laatste $k+1$ nullen vervangen door $2999\ldots999$ met k negens. In totaal gaat het dan dus om $(k-1)+k$ negens; voor $k = 2009$ zijn dat er 4017. □



B3. Met een brede kwast worden de diagonalen van een vierkante tegel geverfd, zie de figuur. Precies de helft van het oppervlak van de tegel is geverfd. De breedte van de verfkwast is 1, zoals aangegeven.
Bereken de lengte van de zijde van de tegel. $2 + 2\sqrt{2}$

Oplossing We kunnen volstaan met het bekijken van een kwart van de tegel: $\triangle ABC$. De oppervlakte van $\triangle PQR$ is de helft van die van $\triangle ABC$. De driehoeken zijn gelijkvormig, dus corresponderende zijden verhouden zich als $1 : \sqrt{2}$, dus $|QR| : |BC| = 1 : \sqrt{2}$. Nu berekenen we $|BQ|$ met Pythagoras in $\triangle BQQ'$: $2|BQ|^2 = |BQ'|^2 + |BQ|^2 = 1^2$, dus $|BQ| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Met $x = |QR|$ vinden we dan $x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot x$, dus $x(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$ oftewel $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2 + \sqrt{2}$. Dan geldt dus $|BC| = x + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$ (of $|BC| = \sqrt{2}\cdot x = \sqrt{2}\cdot(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2$). □

B4. Bepaal een drietal gehele getallen (a, b, c) dat voldoet aan de vergelijkingen: $a + b + c = 18$; $a^2 + b^2 + c^2 = 756$ en $a^2 = bc$.
$(a, b, c) = (-12, 6, 24)$ of $(a, b, c) = (-12, 24, 6)$ (één antwoord is voldoende)

Oplossing We berekenen $(b+c)^2$ op twee manieren. $(b+c)^2 = (18-a)^2 = 324 - 36a + a^2$ en $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = (756 - a^2) + 2a^2$. Dus $a^2 - 36a + 324 = a^2 + 756$, oftewel $-36a = 756 - 324 = 432$, dus $a = -12$. Vullen we dit in de eerste en laatste vergelijking in, dan vinden we dat $b + c = 30$ en $bc = 144$. Door de delers van $144 = 12^2$ te proberen, kunnen we nu een oplossing vinden. Of we substitueren $c = 30 - b$ in de laatste vergelijking, wat leidt tot de tweedegraadsvergelijking $b(30 - b) = 144$ oftewel $b^2 - 30b + 144 = 0$. Uit de ontbinding $(b-6)(b-24) = 0$ (of uit de abc-formule) volgen de twee oplossingen $b = 6$ (en $c = 24$) of $b = 24$ (en $c = 6$).
Alternatieve oplossing We vinden net als hierboven dat $a = -12$. Hieruit volgt door invullen dat $b + c = 30$, $b^2 + c^2 = 756 - 144 = 612$ en $bc = 144$. Combineren van de laatste twee geeft $(b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 612 - 2\cdot 144 = 324$, oftewel $b - c = \pm\sqrt{324} = \pm 18$. Optellen van $b + c = 30$ en $b - c = -18$ geeft $2b = (b+c) + (b-c) = 12$ dus $b = 6$ en bijgevolg $c = 24$. Optellen van $b + c = 30$ en $b - c = 18$ geeft $2b = (b+c) + (b-c) = 48$ dus $b = 24$ en bijgevolg $c = 6$. □