Uitwerkingen
van de Eerste Ronde van de
Nederlandse Wiskunde Olympiade 2008

A-vragen

A1. C) Cedric Als we de gegevens in een tabel zetten, zien we dat de lootjes van Birgit en Cedric nog over zijn. Nu trekt Ersin niet het lootje van Cedric, dus wel dat van Birgit. Dus trekt Alex juist het lootje van Cedric.

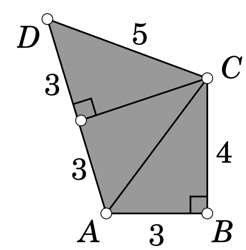
A	B	C	D	E
?	A	D	E	?

A2. B) 4 Zie figuur. Uit $F + 10 + 3 = F + D + 7$ volgt $D = 6$. Uit $7 + E + 3 = C + D + E = C + 6 + E$ volgt $C = 7 + 3 - 6 = 4$.

A	B	7
C	D	E
F	10	3

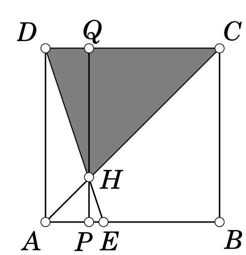
A3. D) 30 Het getal 720 bevat alleen de priemfactoren 2, 3 en 5. Het priemgetal 2 komt viermaal voor (éénmaal in 2, tweemaal in 4 en éénmaal in 6), het priemgetal 3 tweemaal (in 3 en in 6) en 5 éénmaal. De delers zonder factor 3 en 5 zijn 1, 2, 4, 8 en 16. De delers met één factor 3 en geen factor 5 zijn 3, 6, 12, 24 en 48. Met factor 9 en geen factor 5: 9, 18, 36, 72 en 144. Zonder de factor 5 zijn er dus 15 delers. Deze 15 delers geven elk vermenigvuldigd met 5 de resterende 15 delers. In totaal dus 30 delers.
Alternatieve oplossing: Elke deler van $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1$ is van de vorm $2^a \times 3^b \times 5^c$ met vijf mogelijkheden voor de factor 2^a (van 2^0 t/m 2^4), drie mogelijkheden voor 3^b (3^0, 3^1 en 3^2) en twee mogelijkheden voor 5^c (5^0 en 5^1). Gecombineerd dus $5 \times 3 \times 2 = 30$ mogelijkheden.

A4. B) 18 Volgens de stelling van Pythagoras is $|AC| = 5$. Driehoek ACD is dus gelijkbenig met top C. In deze driehoek verdeelt de hoogtelijn uit C de driehoek in twee driehoeken met zijden 3, 4 en 5. Vierhoek $ABCD$ is dus op te delen in drie driehoeken met zijden 3, 4 en 5. De gevraagde oppervlakte is dus $3 \times 6 = 18$.

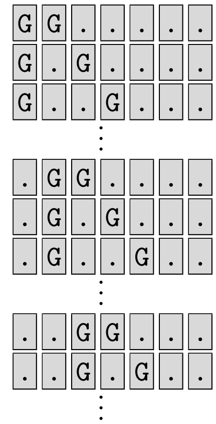


A5. C) 3000 Als x een positief veelvoud van 6 is dat eindigt op een 4 (zoals 24), dan eindigen de eerstvolgende veelvouden van 6 op een 0 ($x + 6$), een 6 ($x + 12$), een 2 ($x + 18$), een 8 ($x + 24$), een 4 ($x + 30$), dus het eerstvolgende veelvoud van 6 dat weer op een 4 eindigt is $x + 30$. Bij elke groep van dertig opeenvolgende getallen zit dus precies één veelvoud van 6 dat op een 4 eindigt. Hoeveel van zulke getallen liggen er tussen 10000 en 99999? Omdat dat in totaal 90000 opeenvolgende getallen zijn, vinden we onder deze getallen $90000 \div 30 = 3000$ zulke zesvouden eindigend op een 4.

A6. E) $\frac{27}{8}$ Trek een lijn door H evenwijdig aan AD. Noem de snijpunten van deze lijn met AB en CD respectievelijk P en Q. Nu geldt $|HP| : |HQ| = |AE| : |CD| = 1 : 3$, dus $|HQ| = \frac{3}{4} \times |PQ| = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$. De oppervlakte van driehoek CDH is dus $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$.



A7. A) 210 Voor de twee G-blokjes zijn er $6+5+4+3+2+1=21$ (of $\binom{7}{2}$) mogelijkheden om op de 7 plaatsen gelegd te worden (zie figuur). Bij elke keuze zijn er voor de twee N-blokjes $4+3+2+1=10$ (of $\binom{5}{2}$) mogelijkheden; dan liggen de drie E-blokjes vast. In totaal dus $21 \times 10 = 210$.
Alternatieve oplossing: Als de letterblokjes verschillend waren geweest waren er 7! woorden mogelijk. De drie E-blokjes zijn echter niet verschillend, dus we tellen elk woord maar liefst 3! keer. Analoog voor de twee N-blokjes en de twee G-blokjes. In totaal dus $\frac{7!}{3!\times 2!\times 2!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\times 4} = 7 \times 6 \times 5 = 210$ verschillende woorden.



A8. B) 5 De vergelijking is equivalent met

$$(x^2-2)^2 - 5 = 1 \quad \text{of} \quad (x^2-2)^2 - 5 = -1.$$

Het eerste deel is equivalent met $x^2 - 2 = \sqrt{6}$ of $x^2 - 2 = -\sqrt{6}$, met 2 resp. 0 oplossingen (het laatste wegens $-\sqrt{6}+2 < 0$).
Het tweede deel is equivalent met $x^2 - 2 = 2$ of $x^2 - 2 = -2$, met 2 resp. 1 oplossing(en). Dus in totaal $2+0+2+1 = 5$ oplossingen.

B-vragen

B1. 1296 In de eerste kolom komen van boven naar beneden achtereenvolgens te liggen $1\times 1, 1\times 2, 1\times 3, \ldots, 1\times 8$ graankorrels.
In totaal dus in de eerste kolom: $1 \times (1+2+3+4+5+6+7+8)$.
In de tweede kolom liggen er: $2 \times (1+2+3+4+5+6+7+8)$.
In de derde kolom liggen er: $3 \times (1+2+3+4+5+6+7+8)$.
$\vdots$
In de achtste kolom ten slotte: $8 \times (1+2+3+4+5+6+7+8)$.
Totaal dus: $(1+2+3+4+5+6+7+8) \times (1+2+3+4+5+6+7+8)$.
Omdat $1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{1}{2}\times 8\times(1+8) = 36$ in totaal dus $36^2 = 1296$ graankorrels.

B2. 6 Als je alle 50 oneven getallen uit de verzameling $\{1,2,3,\ldots,100\}$ pakt dan zijn die bij elkaar opgeteld $\frac{1}{2}\times 50\times(1+99) = 2500$. Dat is 400 te weinig. Vervang dus de kleinste oneven getallen door de grootst mogelijke even getallen, telkens per twee omdat 400 even is. Als we 1 en 3 vervangen door 100 en 98 krijgen we 2694. Daarna $2694-5-7+96+94 = 2872$. We moeten dus nog ten minste één zo'n stap doen. En die lukt: $2872 - 9 - 11 = 2852$, dus plaats bijvoorbeeld 20 en 28 terug; dan hebben we som 2900 gevonden met 6 even getallen en bovendien hebben we laten zien dat het met minder niet lukt.

B3. 110 Voor x geldt $x + \frac{1}{x} = 5$, dus $x^2 - 5x + 1 = 0$. Hieruit volgt dat $x = x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. Merk op dat $x_1x_2 = 1$. Uitwerken geeft $x^3 + x^{-3} = x_1^3 + x_2^3 = \frac{1}{8}\left(\left(5+\sqrt{21}\right)^3 + \left(5-\sqrt{21}\right)^3\right) =$
$\frac{1}{8}\left(\left(5^3 + 3\cdot 5^2\cdot\sqrt{21} + 3\cdot 5\cdot\sqrt{21}^2 + \sqrt{21}^3\right) + \left(5^3 - 3\cdot 5^2\cdot\sqrt{21} + 3\cdot 5\cdot \sqrt{21}^2 - \sqrt{21}^3\right)\right) =$
$\frac{2}{8}\left(5^3 + 3\cdot 5\cdot 21\right) = 110$.
Alternatieve oplossing: Uit $(x+\frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x^2(\frac{1}{x}) + 3x(\frac{1}{x})^2 + (\frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ volgt dat $x^3 + \frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x}) = 5^3 - 3\times 5 = 110$.

B4. $2\sqrt{3}$ Noem de loodrechte projecties van P op de zijden AB, BC, CD en DA achtereenvolgens Q, R, S en T. Dan geldt:
$|AQ|^2 + |QP|^2 = 36$ en $|BQ|^2 + |SP|^2 = 25$ (want $|BQ| = |CS|$),
dus $|AQ|^2 + |QP|^2 + |BQ|^2 + |SP|^2 = 61$. Verder $|BQ|^2 + |QP|^2 = 49$.
Dus $|DS|^2 + |SP|^2 = |AQ|^2 + |SP|^2 = 61 - 49 = 12$ en $|DP| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.