NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE
1e ronde 2007 uitwerkingen

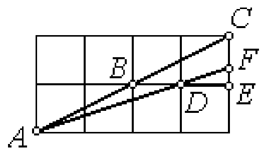
A1. Als M uit vier enen bestaat dan is $2007\times M = 2229777$, dus de som van de cijfers is $3\times(2+7)+9=4\times 9$. Als M uit vijf enen bestaat dan is $2007\times M = 22299777$; de som van de cijfers is dan $3\times(2+7)+9+9=5\times 9$. Als M uit 2007 enen bestaat dan is de som van de cijfers $2007\times 9 = 18063$. (C).

A2. Je hoeft hier de noemers niet gelijknamig te maken om de breuken te vergelijken. Je kunt de noemers allemaal dicht bij de 100 kiezen : $0{,}16=\frac{16}{100}$, $\frac{1}{7}=\frac{14}{98}$, $\frac{5}{33}=\frac{15}{99}$. Omdat bij $k<n$ geldt: $\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n+1}$, immers $\frac{k+1}{n+1}-\frac{k}{n}=\frac{n-k}{n(n+1)}>0$, vinden we $\frac{13}{97}<\frac{14}{98}<\frac{15}{99}<\frac{16}{100}<\frac{17}{101}$. (E).

A3. Uit de negen punten kun je op $\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$ manieren drie punten kiezen. Maar als drie punten op één lijn liggen, dan levert dat geen driehoek op. Dat komt acht keer voor, drie keer horizontaal, drie keer verticaal en twee keer diagonaal. Dus $84-8=76$ mogelijkheden. (A).

A4. $\frac{ab+1}{b}=13\times\frac{ba+1}{a}$. Dus $a=13b$ en dus zeven paren $(13,1), (26,2), \cdots, (91,7)$. (B)

A5. Route (A) is langer dan route (B) want $\sqrt{5}>2$. Dus (A) valt af. Route (E) is langer dan route (A), want $\sqrt{5}>1$, dus (E) valt af. Route (D) is langer dan route (B) want $\sqrt{13}>\sqrt{10}$. Dus (D) valt af. Route (C) en route (B) hebben een stuk met lengte $\sqrt{5}$ en een stuk met lengte 2 gemeenschappelijk. Blijft over te vergelijken de rest van (C), $2\sqrt{5}$, en de rest van (B), $1+\sqrt{10}$.
$\sqrt{10}+1=ADE<ADF<ABC=2\sqrt{5}$. Route (B) is het kortst.



A6. We vervolgen de rij met alleen de laatste cijfers van de getallen: we vinden
2, 2, 4, 8, ··2, ··6, ··2, ··2, ·· 4, ··8, ··2, ··6, ··2, enz . We zien dat een groep van zes cijfers zich telkens herhaalt. Omdat $2007=334\times 6+3$ is het laatste cijfer van het 2007e getal gelijk aan dat van het derde getal, dus 4. (C).

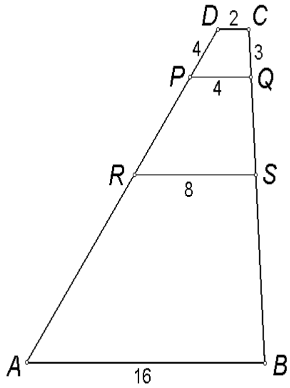
A7. $9^n + 9^n + 9^n = 3\times 9^n = 3\times 3^{2n} = 3^{2n+1}$. Dus $n=1003$. (C).

A8. Laat in gedachten eerst de zes leerlingen een stoel pakken en op een rij gaan zitten. Vervolgens kiezen de leraren met hun stoel een plaats tussen de leerlingen. De heer Aap kan dan zijn stoel op vijf plaatsen tussen de zes leerlingen neerzetten en gaan zitten. De heer Noot kan daarna zijn stoel op vier plaatsen neerzetten en gaan zitten en voor mevrouw Mies zijn er dan nog drie plaatsen over. Het aantal mogelijkheden is dus $5\times 4\times 3=60$. (C).

B1. Ga uit van het ongunstigste geval. Dan pak je alle kaartjes met een 1 t/m een 9 en dat zijn er 45. Van alle andere kaartjes, met nummers 10 t/m 50, pak je er telkens negen met hetzelfde nummer. Dat zijn er $41\times 9=369$. Je hebt dan in totaal al $45+369=414$ kaartjes gepakt. Als je $414+1=415$ kaartjes pakt, dan moeten er dus ten minste tien bij zijn met hetzelfde nummer.

B2. We noemen de snijpunten van de twee lijnen met de vierhoek *P*, *Q* , *R* en *S*, met *P* en *R* op *DA* en *Q* en *S* op *CB,* zie figuur. De drie vierhoeken zijn gelijkvormig. Daarom geldt:

$\frac{|DC|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{|RS|}{|AB|}$ dus $|PQ|^2 = 2 \times |RS|$, $|RS|^2 = |PQ| \times 16$ dus $|PQ|^3 = 64$ en $|PQ| = 4$ en $|RS| = 8$. De zijden van vierhoek *RSQP* zijn dus twee maal zo lang als de overeenkomstige zijden van vierhoek *PQCD* en de zijden van vierhoek *ABSR* zijn weer twee maal zo lang als de overeenkomstige zijden van vierhoek *RSQP*.
$|RP| = 2 \times |PD|$ en $|AR| = 2 \times |RP| = 4 \times |PD|$. Dus $|AD| = 7 \times |PD|$, dus $|PD| = 4$. Evenzo vind je: $|QC| = 3$.
De gevraagde omtrek van vierhoek *PQCD* is 13.



B3. $8 \otimes 5 = (5+3) \otimes 5$, $\frac{5 \otimes (5+3)}{5 \otimes 3} = \frac{5+3}{3} = \frac{8}{3}$ en $8 \otimes 5 = \frac{8}{3} \times (5 \otimes 3)$.

$5 \otimes 3 = (3+2) \otimes 3$, $\frac{3 \otimes (3+2)}{3 \otimes 2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$ en $5 \otimes 3 = \frac{5}{2} \times (3 \otimes 2)$

$3 \otimes 2 = (2+1) \otimes 2$, $\frac{2 \otimes (2+1)}{2 \otimes 1} = \frac{2+1}{1} = 3$ en $3 \otimes 2 = 3 \times (2 \otimes 1)$

$2 \otimes 1 = (1+1) \otimes 1$, $\frac{1 \otimes (1+1)}{1 \otimes 1} = \frac{1+1}{1} = 2$ en $2 \otimes 1 = 2 \times (1 \otimes 1)$. $1 \otimes 1 = 1 + 2 = 3$, dus

$2 \otimes 1 = 2 \times 3 = 6$, dus $3 \otimes 2 = 3 \times 6 = 18$, dus $5 \otimes 3 = \frac{5}{2} \times 18 = 45$, dus $8 \otimes 5 = \frac{8}{3} \times 45 = 120$.

B4. Noem de lengte van de gelijkzijdige driehoek *x*. $x^2 = |BD|^2 + 1^2 = \left(|EA| + |AF|\right)^2 + 1 =$
$\left(\sqrt{x^2 - 4^2} + \sqrt{x^2 - 3^2}\right)^2 + 1 = 2x^2 - 25 + 2\sqrt{x^2 - 16} \times \sqrt{x^2 - 9} + 1 \cdot$
$2\sqrt{x^2 - 16} \times \sqrt{x^2 - 9} = -x^2 + 24$. Kwadrateren: $4(x^4 - 25x^2 + 144) = x^4 - 48x^2 + 576$ ofwel $3x^4 - 52x^2 = 0 \cdot$

Omdat $x \neq 0$ vinden we $3x^2 = 52$. Dus $x = \sqrt{\frac{52}{3}} = 2\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{39}$.