Selectietoets

vrijdag 6 maart 2015

Uitwerkingen

Opgave 1. Laat m en n positieve gehele getallen zijn zodat $5m+n$ een deler is van $5n+m$. Bewijs dat m een deler is van n.

Oplossing I. Er is een positieve gehele k met $(5m+n)k = 5n+m$. Dus $5km-m = 5n-kn$, oftewel $(5k-1)m = (5-k)n$. De linkerkant is positief, dus de rechterkant ook, waaruit volgt dat $k < 5$. Als $k = 1$, dan is $4m = 4n$, dus $m = n$, dus $m \mid n$. Als $k = 2$, dan is $9m = 3n$, dus $3m = n$, dus $m \mid n$. Als $k = 3$, dan is $14m = 2n$, dus $7m = n$, dus $m \mid n$. Als $k = 4$, dan is $19m = n$, dus $m \mid n$. We zien dat in alle gevallen geldt dat $m \mid n$. $\square$

Oplossing II. Zij $d = \text{ggd}(m, n)$ en schrijf $m = ad$, $n = bd$. Dan zijn a en b positieve gehele getallen met $\text{ggd}(a, b) = 1$. Uit $5m + n \mid 5n + m$ volgt $5ad + bd \mid 5bd + ad$, dus $5a + b \mid 5b + a$. Nu geldt ook

$$5a + b \mid (5b + a) - 5(5a + b) = -24a$$

en

$$5a + b \mid 5(5b + a) - (5a + b) = 24b.$$

Dus $5a + b \mid \text{ggd}(24a, 24b) = 24$. Als $a = 1$ geldt altijd $a \mid b$. Als $a \geq 2$ is $5a + b \geq 11$, dus kan $5a + b$ alleen gelijk zijn aan 12 of 24. Als $5a + b = 12$, dan moet gelden $a = 2$ en $b = 2$, maar die zijn niet copriem, tegenspraak. Als $5a + b = 24$, dan moet $a = 2$ en $b = 14$ of $a = 3$ en $b = 9$ of $a = 4$ en $b = 4$. In alle drie zijn a en b niet copriem, tegenspraak. Dus alleen $a = 1$ kan gelden en dan is $a \mid b$, waaruit volgt $ad \mid bd$, dus $m \mid n$. $\square$

Opgave 2. Gegeven zijn positieve gehele getallen r en k en een oneindige rij positieve gehele getallen $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ zodat $\frac{r}{a_r} = k + 1$. Bewijs dat er een t is met $\frac{t}{a_t} = k$.

Oplossing. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat zo'n t niet bestaat. Als $a_k = 1$, dan zou $\frac{k}{a_k} = k$, tegenspraak met onze aanname. Dus $a_k \geq 2$. We bewijzen nu met inductie naar i dat $a_{ik} \geq i+1$. De inductiebasis hebben we zojuist gedaan. Stel nu dat voor zekere $i \geq 1$ geldt dat $a_{ik} \geq i+1$. Dan is ook $a_{(i+1)k} \geq i+1$. Als $a_{(i+1)k} = i+1$, dan is $\frac{(i+1)k}{a_{(i+1)k}} = k$, tegenspraak. Dus $a_{(i+1)k} \geq i+2$. Dit voltooit de inductiestap. Neem nu $i = a_r$, dan is dus $a_{a_r k} \geq a_r + 1$. En omdat $r = a_r(k+1)$ geldt $a_r = a_{a_r(k+1)} \geq a_{a_r k} \geq a_r + 1$, tegenspraak. $\square$

Opgave 3. Zij $n \geq 2$ een positief geheel getal. Ieder vakje van een $n \times n$-bord wordt rood of blauw gekleurd. We leggen dominostenen op het bord, die elk twee vakjes bedekken. We noemen een dominosteen *effen* als hij op twee rode of twee blauwe vakjes ligt en *kleurrijk* als hij op een rood en een blauw vakje ligt. Vind het grootste positieve gehele getal k met de volgende eigenschap: hoe de rood/blauw-kleuring van het bord ook gebeurt, het is altijd mogelijk om k niet-overlappende dominostenen op het bord te leggen die ofwel allemaal effen zijn ofwel allemaal kleurrijk.

Oplossing. We bewijzen dat $k = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ de grootst mogelijke waarde is.
Stel dat n even is. Dan is het mogelijk om het bord te bedekken met $\frac{n^2}{2}$ dominostenen (zonder op kleuren te letten). Omdat er $\frac{n^2}{2}$ dominostenen zijn die allemaal kleurrijk of effen zijn, zijn er of minstens $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor = \frac{n^2}{4}$ kleurrijke of minstens $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor = \frac{n^2}{4}$ effen dominostenen.
Als n oneven is, kunnen we het bord bedekken met $\frac{n^2-1}{2}$ dominostenen. (Merk op dat dit getal geheel en even is.) Van deze dominostenen zijn er of minstens $\frac{n^2-1}{4} = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ kleurrijk, of minstens $\frac{n^2-1}{4} = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ effen. Dit bewijst dat het altijd mogelijk is om op het bord minstens $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ kleurrijke dominostenen of minstens $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ effen dominostenen neer te leggen.
We bewijzen nu dat het mogelijk is om de kleuring in rode en blauwe vakjes zo te kiezen, dat er niet meer dan $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ effen en ook niet meer dan $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ kleurrijke dominostenen neer te leggen zijn.
Kleur de vakjes van het bord zwart-wit als op een schaakbord, zodat het vakje linksonder wit is. Als n even is, zijn er evenveel witte als zwarte vakjes, namelijk $\frac{n^2}{2}$. Als n oneven is, is er een zwart vakje minder en is het aantal zwarte vakjes gelijk aan $\frac{n^2-1}{2} = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$. In beide gevallen is dit een even aantal vakjes, aangezien voor oneven n geldt dat $n^2 \equiv 1 \mod 4$. Kleur de helft van de zwarte vakjes rood en alle andere vakjes blauw. Dan zijn er $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ rode vakjes, dus we kunnen maximaal $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ niet-overlappende kleurrijke dominostenen op het bord leggen: elk van deze dominostenen bedekt immers een rood vakje. Een effen dominosteen kan geen twee rode vakjes bedekken, want er zijn geen twee vakjes naast elkaar rood gekleurd. Hij moet dus wel twee blauwe vakjes bedekken. Daar zit in elk geval een zwart vakje bij, dus het aantal effen dominostenen is hoogstens het aantal zwart-blauwe vakjes en dat is $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Dus zowel van de kleurrijke als van de effen dominostenen kunnen er hooguit $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ tegelijk op het bord worden gelegd.
We concluderen dat de maximale k inderdaad $k = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ is. $\square$

Opgave 4. In een driehoek ABC is D het snijpunt van de binnenbissectrice van $\angle BAC$ met zijde BC. Zij P het tweede snijpunt van de buitenbissectrice van $\angle BAC$ met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Een cirkel door A en P snijdt lijnstuk BP inwendig in E en lijnstuk CP inwendig in F. Bewijs dat $\angle DEP = \angle DFP$.

Oplossing. We bekijken de configuratie waarbij de punten A, C, B en P in die volgorde op de omgeschreven cirkel liggen. Het andere geval gaat analoog.
Vanwege de omtrekshoekstelling in de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ geldt

$$\angle ABE = \angle ABP = \angle ACP = \angle ACF.$$

Verder is wegens de omtrekshoekstelling in de cirkel door A, P, E en F:

$$\angle AEB = 180^\circ - \angle AEP = 180^\circ - \angle AFP = \angle AFC.$$

Met (hh) concluderen we dat $\triangle ABE \sim \triangle ACF$. Hieruit volgt

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CF|}$$

Volgens de bissectricestelling geldt

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|DC|},$$

dus samen geeft dit

$$\frac{|BE|}{|CF|} = \frac{|DB|}{|DC|}. \tag{1}$$

Kies Z op PA zodat A tussen P en Z ligt. Omdat AP de buitenbissectrice van $\angle BAC$ is, geldt $\angle PAB = \angle ZAC = 180^\circ - \angle PAC$. Dus met behulp van de omtrekshoekstelling en koordenvierhoekstelling krijgen we nu

$$\angle DCF = \angle PCB = \angle PAB = 180^\circ - \angle PAC = \angle PBC = \angle EBD.$$

(Alternatief voor het bewijs $\angle DCF = \angle EBD$: noem Q het tweede snijpunt van de binnenbissectrice van $\angle BAC$ met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Omdat $\angle CAQ = \angle BAQ$, zijn de bogen BQ en CQ even lang. De buitenbissectrice en de binnenbissectrice staan loodrecht op elkaar, dus met Thales zien we dat PQ een middellijn van de omgeschreven cirkel is. Daaruit volgt dat ook de bogen BP en CP even lang zijn. Dus $|BP| = |CP|$ en daarmee ook

$$\angle EBD = \angle PBC = \angle BCP = \angle DCF,$$

wat we wilden bewijzen.)
Gecombineerd met (1) krijgen we nu $\triangle BED \sim \triangle CFD$ (zhz). Hieruit volgt dat $\angle BED = \angle CFD$ en dus ook $\angle DEP = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - \angle CFD = \angle DFP$. $\square$

Opgave 5. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$(x^2 + y^2)f(xy) = f(x)f(y)f(x^2 + y^2)$$

voor alle reële x en y.

Oplossing. Vul in $x = y = 0$, dan staat er $0 = f(0)^3$, dus $f(0) = 0$. We bekijken nu twee gevallen: f is nog ergens anders ook 0 of juist niet. Voor het eerste geval nemen we dus aan dat er nog een $a \neq 0$ is zodat $f(a) = 0$. Dan geeft $x = a$ invullen dat $(a^2 + y^2)f(ay) = 0$ voor alle y. Omdat $a^2 + y^2 > 0$ aangezien $a \neq 0$, is $f(ay) = 0$ voor alle y. Maar ay kan alle waarden in $\mathbb{R}$ aannemen, dus $f(x) = 0$ voor alle x. Dit is meteen een kandidaatfunctie en deze voldoet.
We bekijken nu verder het tweede geval: $f(x) \neq 0$ voor alle $x \neq 0$. Neem nu $x \neq 0$ en $y = 1$. Dan geldt $(x^2 + 1)f(x) = f(x)f(1)f(x^2 + 1)$ en $f(x) \neq 0$, dus we kunnen hier delen door $f(x)$. We krijgen $(x^2 + 1) = f(1)f(x^2 + 1)$. Noem $f(1) = c$. We weten $c \neq 0$, dus $f(x^2 + 1) = \frac{x^2+1}{c}$. Omdat $x^2 + 1$ alle reële waarden groter dan 1 kan aannemen, geldt nu $f(x) = \frac{x}{c}$ voor alle $x > 1$.
Neem $x = y = 2$ en vul dit in: $(4 + 4)f(4) = f(2)f(2)f(4 + 4)$. Voor $x > 1$ weten we de functiewaarde, dus in het bijzonder weten we ook $f(2)$, $f(4)$ en $f(8)$. Dus $8 \cdot \frac{4}{c} = \frac{2}{c} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{8}{c}$, oftewel $\frac{1}{c} = \frac{1}{c^3}$. We zien dat $c^2 = 1$, dus $c = 1$ of $c = -1$. Omdat $c^2 = 1$, kunnen we nu ook schrijven $f(x) = cx$ voor alle $x \geq 1$.
Neem $x > 1$ en vul $y = \frac{1}{x}$ in. Dat geeft $(x^2 + \frac{1}{x^2})f(1) = f(x)f(\frac{1}{x})f(x^2 + \frac{1}{x^2})$. Omdat $x > 1$, is ook $x^2 + \frac{1}{x^2} > 1$, dus hier staat $(x^2 + \frac{1}{x^2})c = xc \cdot f(\frac{1}{x}) \cdot c(x^2 + \frac{1}{x^2})$, oftewel $1 = xc \cdot f(\frac{1}{x})$. Dus $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{xc} = c \cdot \frac{1}{x}$. We concluderen dat $f(x) = cx$ voor alle $x > 0$ met $x \neq 1$. Maar ook voor $x = 1$ geldt $f(x) = cx$, want $f(1) = c$. Dus $f(x) = cx$ voor alle $x > 0$.
Vul nu $x = y = -1$ in. Dat geeft $2f(1) = f(-1)^2 f(2)$. We weten $f(1) = c$ en $f(2) = 2c$, dus $2c = f(-1)^2 \cdot 2c$, oftewel $f(-1)^2 = 1$ aangezien $c \neq 0$. Dus $f(-1) = 1$ of $f(-1) = -1$.
Neem $x > 0$ en $y = -1$. Dat geeft $(x^2+1)f(-x) = f(x)f(-1)f(x^2+1)$, dus $(x^2+1)f(-x) = cx \cdot f(-1) \cdot c(x^2 + 1)$, oftewel $f(-x) = c^2 x f(-1) = xf(-1)$. Als we $d = f(-1)$ noemen, geldt dus $f(x) = -dx$ voor alle $x < 0$, met $d^2 = 1$.
We concluderen dat er vier mogelijke kandidaatfuncties zijn (naast $f(x) = 0$, die we al gecontroleerd hadden): $f(x) = x$, $f(x) = -x$, $f(x) = |x|$ en $f(x) = -|x|$. We controleren eerst $f(x) = tx$ met $t = \pm 1$. Dan staat er links $(x^2 + y^2) \cdot txy$ en rechts $tx \cdot ty \cdot t(x^2 + y^2)$. Omdat $t^2 = 1$, staat links en rechts hetzelfde. Dus deze twee functies voldoen. Nu controleren we $f(x) = t|x|$, waarbij weer $t = \pm 1$. Nu staat links $(x^2 + y^2) \cdot t|xy|$ en rechts $t|x| \cdot t|y| \cdot t|x^2 + y^2|$. Omdat $x^2 + y^2 = |x^2 + y^2|$ en $|xy| = |x||y|$, staat links en rechts hetzelfde. Dus ook deze twee functies voldoen.
Er zijn dus vijf oplossingen: $f(x) = 0$, $f(x) = x$, $f(x) = -x$, $f(x) = |x|$ en $f(x) = -|x|$. $\square$