Selectietoets

vrijdag 8 maart 2013

Uitwerkingen

Opgave 1. In trapezium $ABCD$ is $AB \parallel CD$. Zij M het midden van diagonaal AC. Neem aan dat driehoeken ABM en ACD dezelfde oppervlakte hebben. Bewijs dat $DM \parallel BC$.

Oplossing. Omdat M het midden van AC is, is de oppervlakte van driehoek ABM gelijk aan de oppervlakte van driehoek BCM. Dus de oppervlakte van driehoek ABC is twee keer zo groot als de oppervlakte van driehoek ABM en daarmee ook twee keer zo groot als de oppervlakte van driehoek ACD. De hoogte van driehoek ACD ten opzichte van basis CD is de afstand tussen de evenwijdige lijnen AB en CD. Dat is ook de hoogte van driehoek ABC ten opzichte van basis AB. Omdat die hoogtes dus even groot zijn, moet $|AB| = 2 \cdot |CD|$.

Zij nu K het midden van AB. Dan is KM een middenparallel van $\triangle ABC$ en dus is $KM \parallel BC$. Verder is $|KB| = \frac{1}{2}|AB| = |CD|$, dus vierhoek $KBCD$ heeft een paar evenwijdige en even lange zijden, waarmee het een parallellogram is. Dus $DK \parallel BC$. Maar dat betekent dat DK en KM dezelfde lijn zijn (want beide door K en beide evenwijdig aan BC), zodat DM ook wel deze lijn moet zijn. Dus DM is ook evenwijdig met BC. $\square$

Opgave 2. Gegeven is een drietal verschillende positieve gehele getallen (a, b, c) met $a + b + c = 2013$. Een *stap* bestaat uit het vervangen van het drietal (x, y, z) door het drietal $(y+z-x, z+x-y, x+y-z)$. Bewijs dat we uitgaande van het drietal (a, b, c) na 10 stappen een drietal krijgen dat minstens één negatief getal bevat.

Oplossing I. Het verschil tussen de eerste twee getallen in het nieuwe drietal $(y + z - x, z + x - y, x + y - z)$ is $(y + z - x) - (z + x - y) = 2y - 2x$, terwijl het verschil tussen de eerste twee getallen in het oude drietal (x, y, z) nog $x - y$ was. Het verschil is dus in één stap vermenigvuldigd met -2 en het absolute verschil dus met 2. Dit geldt ook voor het verschil tussen het tweede en derde getal en voor het verschil tussen het eerste en derde getal. Omdat de drie getallen a, b en c verschillend zijn, zijn er twee bij met absoluut verschil minstens 2. Na het uitvoeren van tien stappen op het drietal (a, b, c), zijn er dus twee getallen met absoluut verschil minstens $2 \cdot 2^{10} = 2048$.
Merk nu op dat de som van de getallen in een drietal gelijk blijft bij het uitvoeren van een stap, want

$$(y + z - x) + (z + x - y) + (x + y - z) = x + y + z.$$

Dus het drietal dat ontstaan is door tien stappen uit te voeren op (a, b, c), heeft nog steeds som 2013. We hadden gezien dat er twee getallen met absoluut verschil minstens 2048 zijn. Als alle drie de getallen niet-negatief zijn, is de som dus minstens 2048 en dat is weer groter dan 2013; tegenspraak. Dus bevat het drietal een negatief getal. $\square$

Oplossing II. Omdat de som van a, b en c gelijk aan 2013 is, kunnen we schrijven

$$(a, b, c) = (671 + u, 671 + v, 671 + w)$$

met $u + v + w = 0$. Zij (a_i, b_i, c_i) het drietal dat je krijgt na i stappen. Na één stap is het eerste getal vervangen door

$$a_1 = b+c-a = (671+v)+(671+w)-(671+u) = 671+v+w-u = 671+(v+w+u)-2u = 671-2u.$$

Het verschil met 671 is dus na één stap vermenigvuldigd met -2. Hetzelfde geldt voor het tweede en derde getal in het drietal. Met inductie zien we nu direct dat

$$(a_i, b_i, c_i) = (671 + (-2)^i \cdot u, 671 + (-2)^i \cdot v, 671 + (-2)^i \cdot w).$$

Omdat $u + v + w = 0$ en ze allemaal verschillend moeten zijn, is er minstens één getal van die drie dat negatief is, zeg u. Dan is

$$a_{10} = 671 + (-2)^{10} \cdot u = 671 + 1024u \leq 671 - 1024 < 0.$$

$\square$

Oplossing III. Noem $S = x + y + z$. Dan wordt het drietal (x, y, z) in een stap vervangen door het drietal $(S - 2x, S - 2y, S - 2z)$. De som van deze drie getallen is $3S - 2S = S$. De som van de getallen van een drietal verandert dus niet als je een stap uitvoert.
Zij (a_i, b_i, c_i) het drietal dat je krijgt na i stappen op het drietal (a, b, c). We hebben nu $S = a + b + c = 2013$. Er geldt $a_1 = S - 2a$, dus a_1 is van de vorm $m \cdot S + n \cdot a$ met $n = -2$. We bewijzen met inductie dat elke a_i in deze vorm te schrijven is waarbij n gelijk is aan $(-2)^i$. De inductiebasis hebben we zojuist gedaan. Zij nu $i \geq 2$ en stel dat a_{i-1} van de vorm $m \cdot S + n \cdot a$ is met $n = (-2)^{i-1}$. We weten dat $a_i = S - 2a_{i-1}$. Dus a_i is van de vorm $m' \cdot S + n' \cdot a$ met $n' = -2n = (-2)^i$. Dit voltooit de inductiestap. In het bijzonder weten we nu voor $i = 10$ dat er een M is met $a_{10} = M \cdot S + 1024 \cdot a$. Als we dezelfde redenering toepassen op b en c komt daar dezelfde M uit, dus $b_{10} = M \cdot S + 1024 \cdot b$ en $c_{10} = M \cdot S + 1024 \cdot c$.
Verder weten we nog steeds dat de som van de getallen S is. Dus

$$S = a_{10} + b_{10} + c_{10} = 3M \cdot S + 1024 \cdot (a + b + c) = (3M + 1024) \cdot S.$$

We concluderen dat $3M + 1024 = 1$, dus $3M = -1023$, dus $M = -341$.
Stel nu dat a_{10}, b_{10} en c_{10} alle drie niet-negatief zijn. Dan is $-341 \cdot S + 1024 \cdot a \geq 0$, waarbij we ook nog weten dat $S = 2013$. Dus

$$a \geq \frac{341 \cdot 2013}{1024} = \frac{1023 \cdot 2013}{3 \cdot 1024} = \frac{1023}{1024} \cdot 671 > \frac{670}{671} \cdot 671 = 670.$$

Dus $a \geq 671$. Maar op dezelfde manier zien we dat $b \geq 671$ en $c \geq 671$. Bovendien zijn a, b en c verschillend, dus $2013 = a + b + c \geq 671 + 672 + 673 = 2016$. Tegenspraak. Dus a_{10}, b_{10} en c_{10} zijn niet alle drie niet-negatief. $\square$

Opgave 3. Vind alle drietallen (x,n,p) van positieve gehele getallen x en n en priemgetallen p waarvoor geldt

$$x^3 + 3x + 14 = 2 \cdot p^n.$$

Oplossing. *Omdat de rechterkant een product is van priemfactoren, zou het handig zijn als de linkerkant ook een product is. Het zou dan te factoriseren moeten zijn in een eerstegraads en een tweedegraads polynoom in x. Proberen geeft dan de volgende ontbinding.* We kunnen de linkerkant ontbinden als $(x+2)(x^2-2x+7)$. Er moet dus gelden

$$(x+2)(x^2-2x+7) = 2p^n.$$

Stel nu eerst dat x even is. Dan moet $x+2 = 2p^a$ voor zekere gehele $a \geq 0$ en $x^2-2x+7 = p^{n-a}$. (Merk op dat dit ook goed gaat als $p = 2$.) Omdat x een positief geheel getal is, is $x+2 \geq 3$ en kunnen we $a = 0$ dus uitsluiten. Verder geldt $x^2-3x+5 > (x-\frac{3}{2})^2 \geq 0$ voor alle x, dus $x^2-2x+7 > x+2$. Dat betekent dat $n-a > a$. We vullen nu $x = 2p^a-2$ in in $x^2-2x+7 = p^{n-a}$:

$$(2p^a-2)^2 - 2(2p^a-2) + 7 = p^{n-a},$$

oftewel

$$4p^{2a} - 12p^a + 15 = p^{n-a}.$$

Omdat $n-a > a$, geldt $p^a \mid p^{n-a}$. Verder geldt natuurlijk ook $p^a \mid p^a$ en $p^a \mid p^{2a}$. Dus p^a moet ook een deler zijn van 15. Daaruit volgt $p = 3$ of $p = 5$ en verder $a = 1$. Als $p = 3$, staat er links 15 en rechts 3^{n-1}; dat geeft geen oplossing. Als $p = 5$, staat er links 55 en rechts 5^{n-1}; dat geeft ook geen oplossing.
Stel nu dat x oneven is. Dan moet $x+2 = p^a$ voor zekere gehele $a \geq 0$ en $x^2-2x+7 = 2p^{n-a}$. Omdat x een positief geheel getal is, is $x+2 \geq 3$ en valt $a = 0$ dus weer af. Verder geldt dat $x \neq 2$, dus dat $x^2-4x+3 = (x-2)^2-1 \geq 0$, dus $x^2-2x+7 \geq 2(x+2)$. Dus $n-a \geq a$. We vullen nu $x = p^a-2$ in in $x^2-2x+7 = 2p^{n-a}$:

$$(p^a-2)^2 - 2(p^a-2) + 7 = 2p^{n-a},$$

oftewel

$$p^{2a} - 6p^a + 15 = 2p^{n-a}.$$

Omdat $n-a \geq a$, geldt $p^a \mid p^{n-a}$. Dus vinden we ook hier dat $p^a \mid 15$, waaruit volgt $p = 3$ of $p = 5$ en verder $a = 1$. Als $p = 3$, staat er links 6 en rechts $2 \cdot 3^{n-1}$, dus $n = 2$. We vinden $x = 3-2 = 1$. Inderdaad is $(1,2,3)$ een oplossing. Als $p = 5$, staat er links 10 en rechts $2 \cdot 5^{n-1}$, dus $n = 2$. We vinden $x = 5-2 = 3$. Inderdaad is $(3,2,5)$ een oplossing.
Er zijn dus twee oplossingen, namelijk $(1,2,3)$ en $(3,2,5)$. $\square$

Opgave 4. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x))$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing. Vul in $x = y = 0$: dat geeft

$$f(0) = f(0) - 0 + f(f(0)),$$

dus $f(f(0)) = 0$. Vul in $x = y = 1$: dat geeft

$$f(1 + f(1)) = f(f(1)) - 1 + f(1 + f(1)),$$

dus $f(f(1)) = 1$. Vul nu in $x = 1$, $y = 0$:

$$f(1) = f(f(0)) - 1 + f(f(1)).$$

We weten dat $f(f(0)) = 0$ en $f(f(1)) = 1$, dus we vinden nu $f(1) = 0$. Omdat $f(f(1)) = 1$, geeft dit ook $f(0) = 1$. Vul nu in $y = 0$:

$$f(x) = f(x) - x + f(f(x)) \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R},$$

dus $f(f(x)) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Vul in $x = 1$: dat geeft

$$f(1) = f(f(y)) - 1 + f(y) \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Samen met $f(1) = 0$ en $f(f(y)) = y$ krijgen we nu $0 = y - 1 + f(y)$, dus $f(y) = 1 - y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. We hebben nu gevonden dat de enige mogelijke oplossing kan zijn: $f(x) = 1 - x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Als we dit invullen in de oorspronkelijke funtievergelijking, krijgen we links

$$1 - (x + y(1 - x)) = 1 - x - y + xy$$

en rechts

$$1 - x(1 - y) - x + 1 - (y + 1 - x) = 1 - x + xy - x + 1 - y - 1 + x = 1 - x - y + xy.$$

Dus deze functie voldoet en is daarmee de enige oplossing.

Opgave 5. Zij $ABCD$ een koordenvierhoek met $|AD| = |BD|$. Zij M het snijpunt van AC en BD. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle BCM$. Zij N het tweede snijpunt van AC met de omgeschreven cirkel van $\triangle BMI$. Bewijs dat $|AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|$.

Oplossing I. Zij $\alpha = \angle DAB$. Omdat $|AD| = |BD|$, is dan ook $\angle ABD = \alpha$. Vanwege de omtrekshoekstelling vinden we ook $\angle ACD = \alpha$, terwijl de koordenvierhoekstelling geeft dat $\angle BCD = 180° - \alpha$. Dus $\angle BCA = 180° - 2\alpha$. De hoekensom in driehoek BIM geeft, samen met het feit dat I het snijpunt van de bissectrices van $\triangle BCM$ is, dat

$$\angle BIM = 180° - \angle IMB - \angle MBI = 90° + 90° - \tfrac{1}{2}\angle CMB - \tfrac{1}{2}\angle MBC$$

$$= 90° + \tfrac{1}{2}\angle BCM = 90° + \tfrac{1}{2}\angle BCA = 90° + 90° - \alpha = 180° - \alpha.$$

Omdat $BIMN$ een koordenvierhoek is, volgt hieruit $\angle BNM = \alpha$. De hoekensom in $\triangle BNC$ geeft nu

$$\angle NBC = 180° - \angle BCN - \angle CNB = 180° - \angle BCA - \angle MNB = 180° - (180° - 2\alpha) - \alpha = \alpha.$$

Dit betekent dat

$$\angle ABN = \angle ABC - \angle NBC = \angle ABC - \alpha = \angle ABC - \angle ABD = \angle CBD.$$

Dit gecombineerd met $\angle NAB = \angle CAB = \angle CDB$, wat geldt vanwege de omtrekshoekstelling, geeft $\triangle ABN \sim \triangle DBC$ (hh). Dus

$$\frac{|AN|}{|CD|} = \frac{|BN|}{|CB|},$$

oftewel $|CD| \cdot |BN| = |AN| \cdot |CB|$. We weten dat $\angle NBC = \alpha = \angle BNM = \angle BNC$, dus $\triangle BNC$ is gelijkbenig met tophoek C, dus $|CB| = |CN|$. Er geldt dus $|CD| \cdot |BN| = |AN| \cdot |CN|$ en dat is wat we wilden bewijzen. $\square$

Oplossing II. Zij E het tweede snijpunt van BN met de omgeschreven cirkel van $ABCD$. Dan volgt uit de machtstelling dat $|NB| \cdot |NE| = |NA| \cdot |NC|$. Het is dus voldoende om te bewijzen dat $|NE| = |CD|$. Net als in oplossing I noemen we $\alpha = \angle DAB$, die ook gelijk is aan $\angle ABD$ en $\angle ACD$. Verder volgt net als in oplossing I dat $\angle BNM = \alpha$. Dus geldt $\angle BNC = \angle BNM = \alpha$. Dus $\angle BNC = \angle ACD = \angle NCD$, wat betekent dat met Z-hoeken BN en CD evenwijdig zijn. Verder is $\angle BED = \angle BAD = \alpha = \angle BNC$, dus volgt met F-hoeken dat ED en CN evenwijdig zijn. Van de vierhoek $NEDC$ zijn dus de twee paren overstaande zijden evenwijdig aan elkaar, wat betekent dat het een parallellogram is. Dus $|NE| = |CD|$, wat we nog moesten bewijzen. $\square$