Uitwerkingen toets 9 juni 2012

Opgave 1. Voor positieve gehele getallen a en b definiëren we $a \ominus b = \dfrac{a-b}{\text{ggd}(a,b)}$. Bewijs dat voor elk geheel getal $n > 1$ geldt: n is een priemmacht (d.w.z. dat n te schrijven is als $n = p^k$ met p een priemgetal en k een positief geheel getal) dan en slechts dan als voor alle positieve gehele $m < n$ geldt dat $\text{ggd}(n, n \ominus m) = 1$.

Oplossing. Stel eerst dat $n = p^k$ met p priem en $k > 0$. We moeten bewijzen dat $\text{ggd}(n, n \ominus m) = 1$ voor alle $m < n$. Dus bekijk een willekeurig positief geheel getal $m < n$. We schrijven $m = p^l s$ met $p \nmid s$ en $0 \leq l < k$. Nu is $\text{ggd}(n, m) = \text{ggd}(p^k, p^l s) = p^l$, dus

$$n \ominus m = \frac{p^k - p^l s}{p^l} = p^{k-l} - s.$$

Omdat $k - l \geq 1$, geldt $\text{ggd}(p^{k-l} - s, p) = \text{ggd}(-s, p) = 1$ en dus $\text{ggd}(n, n \ominus m) = \text{ggd}(p^k, p^{k-l} - s) = 1$.
Stel nu dat n geen priemmacht is. We moeten bewijzen dat er een $m < n$ is waarvoor $\text{ggd}(n, n \ominus m) \neq 1$. Zij q het kleinste priemgetal dat een deler is van n en zij t het positieve gehele getal zodat $q^t \mid n$ en $q^{t+1} \nmid n$. Omdat n geen q-macht is, bevat n nog een priemdeler $p > q$. Dus $\frac{n}{q^t} \geq p > q$, waaruit volgt $n > q^{t+1}$. Kies nu $m = n - q^{t+1}$. Dan geldt $\text{ggd}(n, m) = \text{ggd}(n, q^{t+1}) = q^t$, dus

$$n \ominus m = \frac{n - (n - q^{t+1})}{q^t} = \frac{q^{t+1}}{q^t} = q.$$

Omdat $q \mid n$, geldt nu $\text{ggd}(n, n \ominus m) = q > 1$. $\square$

Opgave 2. We hebben twee dozen met ballen. In de ene doos zitten m ballen, in de andere doos n ballen, waarbij $m, n > 0$. Twee verschillende handelingen zijn toegestaan:

(i) Verwijder uit beide dozen een gelijk aantal ballen.

(ii) Vergroot het aantal ballen in één van de dozen met een factor k.

Is het altijd mogelijk om alle ballen uit beide dozen te verwijderen met deze twee handelingen,

a) als $k = 2$?

b) als $k = 3$?

Oplossing. Bekijk eerst het geval $k = 2$. We kunnen alle ballen uit beide dozen verwijderen op de volgende manier.
Als $m = n$, dan halen we m ballen uit beide dozen en zijn we klaar. Als $m \neq n$, kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $m < n$. Als bovendien geldt $2m < n$, dan verdubbelen we het aantal ballen in de eerste doos totdat we m' ballen in de eerste doos hebben met de eigenschap dat $m' < n$ en $2m' \geq n$. We kunnen dus ook zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $2m \geq n$. Verwijder nu uit beide dozen $2m - n \geq 0$ ballen. In de eerste doos blijven er $m - (2m - n) = n - m > 0$ ballen over; in de tweede doos blijven er $n - (2m - n) = 2n - 2m = 2(n - m) > 0$ ballen over. Verdubbel nu het aantal ballen in de eerste doos en verwijder vervolgens uit beide dozen $2(n - m)$ ballen; dan zijn beide dozen leeg.
Bekijk nu het geval $k = 3$. Noem S het aantal ballen in de eerste doos min het aantal ballen in de tweede doos. Als we de eerste handeling toepassen, verandert S niet. Als we de tweede handeling toepassen, zeg op een doos met t ballen, dan verandert de pariteit van het aantal ballen in die doos niet (want $3t \equiv t \mod 2$). De pariteit van S verandert dus ook niet. We concluderen dat de pariteit van S nooit verandert. Als we nu beginnen met $m = 1$ en $n = 2$, dan is $S = -1 \equiv 1 \mod 2$. We kunnen nu nooit de situatie bereiken dat beide dozen leeg zijn, want dan zou $S \equiv 0 \mod 2$. Als $k = 3$ kunnen we dus niet altijd beide dozen leeghalen. □

Alternatieve oplossing voor $k = 2$: Als $m = n$, dan halen we m ballen uit beide dozen en zijn we klaar. Als $m \neq n$, kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $m < n$. Haal nu uit beide dozen $m - 1$ ballen weg. Dan blijft er in de eerste doos 1 over. We kunnen nu steeds het aantal ballen in de eerste doos verdubbelen (van 1 naar 2) en vervolgens uit beide dozen 1 weghalen. Hiermee kunnen we doorgaan totdat de tweede doos nog maar 1 bal bevat. Dan halen we uit beide dozen 1 bal weg en zijn beide dozen leeg. □

Opgave 3. Bepaal alle paren (x, y) van positieve gehele getallen die voldoen aan

$$x + y + 1 \mid 2xy \qquad \text{en} \qquad x + y - 1 \mid x^2 + y^2 - 1.$$

Oplossing. Er geldt

$$(x^2 + y^2 - 1) - (x + y + 1)(x + y - 1) = (x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 + 2xy - 1) = -2xy.$$

Omdat $x + y - 1$ een deler is van $x^2 + y^2 - 1$ en natuurlijk ook van $(x + y + 1)(x + y - 1)$, zien we dat $x + y - 1$ een deler is van $2xy$. We weten dat $x + y + 1$ ook een deler is van $2xy$. Maar de ggd van $x + y - 1$ en $x + y + 1$ is 1 of 2, aangezien het verschil van de twee getallen 2 is. Dus geldt dat $2xy$ deelbaar is door $(x + y - 1)(x + y + 1)$ (als de ggd 1 is) of door $\frac{(x+y-1)(x+y+1)}{2}$ (als de ggd 2 is). In beide gevallen geldt dat $4xy$ deelbaar is door $(x + y - 1)(x + y + 1)$ en dus dat voor een zekere $k \geq 1$ geldt:

$$4xy = k(x + y - 1)(x + y + 1) = k(x^2 + y^2 + 2xy - 1) \geq k(4xy - 1),$$

waarbij de laatste ongelijkheid geldt omdat voor alle reële getallen (en dus zeker voor positieve gehele) x en y geldt $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
Als $k \geq 2$, dan geldt dus $4xy \geq 2 \cdot (4xy - 1)$, dus $4xy \leq 2$. Tegenspraak, want x en y zijn positief en geheel, dus $4xy \geq 4$. We concluderen dat moet gelden $k = 1$ en dus $4xy = x^2 + y^2 + 2xy - 1$. Hieruit volgt $x^2 + y^2 - 1 - 2xy = 0$, wat we kunnen herschrijven tot $(x - y)^2 = 1$. Er moet dus gelden $x = y - 1$ of $x = y + 1$.
De mogelijke paren die voldoen zijn dus $(x, x + 1)$ met $x \geq 1$ en $(x, x - 1)$ met $x \geq 2$. We vullen het eerste paar in om te controleren: $2x + 2$ moet een deler zijn van $2x(x + 1)$ en dat klopt; en $2x$ moet een deler zijn van $x^2 + (x + 1)^2 - 1 = 2x^2 + 2x$ en dat klopt ook. Analoog voldoet het tweede paar ook. Dus de oplossingen zijn: alle paren $(x, x + 1)$ met $x \geq 1$ en alle paren $(x, x - 1)$ met $x \geq 2$. $\square$

Opgave 4. Gegeven is een driehoek ABC. De bissectrice van $\angle CAB$ snijdt BC in L. Op het inwendige van zijden AC en AB liggen respectievelijk de punten M en N, zodat AL, BM en CN door één punt gaan en zodat $\angle AMN = \angle ALB$. Bewijs dat $\angle NML = 90°$.

Oplossing. Noem T het snijpunt van MN en BC. Merk op dat omdat $\angle ACB = \angle ALB - \angle LAC = \angle AMN - \angle LAC < \angle AMN$, geldt dat T aan dezelfde kant van C ligt als B (en aan dezelfde kant van M als N). Omdat $\angle AMT = \angle AMN = \angle ALB = \angle ALT$, is $AMLT$ een koordenvierhoek. Dus $\angle NML = \angle TML = \angle TAL$. Het is dus voldoende om te laten zien dat $\angle TAL = 90°$. Dat is precies het geval als AT de buitenbissectrice van $\angle CAB$ is, want de binnen- en buitenbissectrice staan loodrecht op elkaar. Dit gaan we dus bewijzen. Omdat AL, BM en CN elkaar snijden in één punt, geldt volgens de stelling van Ceva dat

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1.$$

Omdat M, N en T op een lijn liggen, geldt volgens de stelling van Menelaos dat

$$\frac{BT}{TC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1.$$

Uit deze twee gelijkheden volgt dat

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BT}{TC}.$$

Volgens de bissectricestelling is $\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|BA|}{|CA|}$, dus geldt ook $\frac{|BT|}{|TC|} = \frac{|BA|}{|CA|}$. Dat betekent weer met de bissectricestelling dat AT de buitenbissectrice van $\angle CAB$ is. Dat is wat we wilden bewijzen. $\square$

Opgave 5. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f\big(x + xy + f(y)\big) = \big(f(x) + \tfrac{1}{2}\big)\big(f(y) + \tfrac{1}{2}\big)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing. Vul in $y = -1$, dan staat er:

$$f\big(f(-1)\big) = \big(f(x) + \tfrac{1}{2}\big)\big(f(-1) + \tfrac{1}{2}\big).$$

Als $f(-1) \neq -\frac{1}{2}$, dan kunnen we delen door $f(-1) + \frac{1}{2}$ en krijgen we

$$f(x) + \tfrac{1}{2} = \frac{f\big(f(-1)\big)}{f(-1) + \frac{1}{2}},$$

wat betekent dat f constant is. Dan is er dus een $c \in \mathbb{R}$ zodat $f(x) = c$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Nu staat er in de functievergelijking:

$$c = \big(c + \tfrac{1}{2}\big)\big(c + \tfrac{1}{2}\big),$$

wat we kunnen herschrijven als $0 = c^2 + \frac{1}{4}$, maar dat heeft geen reële oplossing in c. Dus f kan niet constant zijn.
De enige mogelijkheid is dus dat $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Dit betekent bovendien dat $f(f(-1)) = 0$, dus dat $f(-\frac{1}{2}) = 0$. Vul nu $x = 0$ en $y = -\frac{1}{2}$ in, dat geeft:

$$f\big(f(-\tfrac{1}{2})\big) = \big(f(0) + \tfrac{1}{2}\big)\big(f(-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\big),$$

en dus

$$f(0) = \big(f(0) + \tfrac{1}{2}\big) \cdot \tfrac{1}{2},$$

waaruit volgt dat $f(0) = \frac{1}{2}$.
Stel dat er een $a \neq -1$ is met $f(a) = -\frac{1}{2}$. Vul $y = a$ in:

$$f\big(x(1 + a) - \tfrac{1}{2}\big) = 0.$$

Omdat $1 + a \neq 0$, kan $x(1 + a) - \frac{1}{2}$ alle waarden in $\mathbb{R}$ aannemen als x varieert over $\mathbb{R}$. Dus nu volgt dat f constant 0 is, maar we hadden al gezien dat f niet constant kon zijn. We concluderen dat er geen $a \neq -1$ is met $f(a) = -\frac{1}{2}$. Er is dus maar één x waarvoor $f(x) = -\frac{1}{2}$ en dat is $x = -1$.
Bekijk een willekeurige b met $f(b) = 0$. We vullen $x = b - \frac{1}{2}$ en $y = 0$ in:

$$f\big(b - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\big) = \big(f\big(b - \tfrac{1}{2}\big) + \tfrac{1}{2}\big)\big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\big),$$

oftewel

$$f(b) = \big(f\big(b - \tfrac{1}{2}\big) + \tfrac{1}{2}\big).$$

Omdat $f(b) = 0$, is $f(b - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. We hebben gezien dat dan moet gelden $b - \frac{1}{2} = -1$, dus $b = -\frac{1}{2}$.
Er is dus maar één x waarvoor $f(x) = 0$ en dat is $x = -\frac{1}{2}$. Vul nu $x = -1$ in:

$$f\big(-1 - y + f(y)\big) = 0.$$

Hieruit volgt $-1 - y + f(y) = -\frac{1}{2}$, dus $f(y) = y + \frac{1}{2}$. De enige kandidaatfunctie is dus de functie gegeven door $f(x) = x + \frac{1}{2}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
We controleren deze functie. Links in de functievergelijking komt te staan: $x + xy + y + 1$. Rechts komt te staan $(x + 1)(y + 1)$ en dat is gelijk aan $xy + x + y + 1$. De functie voldoet dus. We concluderen dat er precies één oplossing is: $f(x) = x + \frac{1}{2}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$