# Uitwerkingen toets 16 maart 2012

**Opgave 1.** Bestaan er kwadratische polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ met reële coëfficiënten zodat het polynoom $P(Q(x))$ als nulpunten precies $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$ en $x = 7$ heeft?

---

**Oplossing.** Stel dat zulke polynomen bestaan en schrijf $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Als we 2, 3, 5 en 7 in $Q$ stoppen, moeten er precies de (hoogstens) twee nulpunten van $P$ uitkomen. Omdat er niet meer dan twee keer dezelfde waarde uit $Q(x)$ kan komen (want $Q$ is kwadratisch) krijgen we dus twee verschillende waarden elk precies twee keer.
Stel nu $Q(n) = Q(m)$ voor verschillende getallen $m$ en $n$. Dan geldt $an^2 + bn + c = am^2 + bm + c$, dus $a(n^2 - m^2) = b(m - n)$, dus $a(n + m)(n - m) = -b(n - m)$. Omdat $m - n \neq 0$, volgt hieruit $a(n + m) = -b$, oftewel $n + m = \frac{-b}{a}$.
We weten dat we in 2, 3, 5 en 7 twee verschillende paren $(m, n)$ en $(k, l)$ kunnen vinden zodat $Q(m) = Q(n)$ en $Q(k) = Q(l)$. Er geldt dan dus $m + n = \frac{-b}{a} = k + l$. We moeten dus de vier getallen 2, 3, 5 en 7 op kunnen delen in twee paren die dezelfde som hebben. Dit is echter onmogelijk, aangezien $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ oneven is. We concluderen dat er geen polynomen $P$ en $Q$ met de gevraagde eigenschappen bestaan. $\square$

---

**Opgave 2.** Zij $ABC$ een driehoek en zij $X$ een punt binnen de driehoek. De lijnen $XA$, $XB$ en $XC$ snijden de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ nogmaals in respectievelijk $P$, $Q$ en $R$. Zij $U$ een punt op de halfrechte $XP$ (d.w.z. op de lijn $XP$ zodat $P$ en $U$ aan dezelfde kant van $X$ liggen). De lijn door $U$ evenwijdig aan $AB$ snijdt $BQ$ in $V$. De lijn door $U$ evenwijdig aan $AC$ snijdt $CR$ in $W$.
Bewijs dat $Q$, $R$, $V$ en $W$ op één cirkel liggen.

---

**Oplossing I.** Omdat $AB$ en $UV$ evenwijdig zijn, geldt $\triangle ABX \sim \triangle UVX$ (hh). Zo ook is $\triangle ACX \sim \triangle UWX$. Uit deze gelijkvormigheden verkrijgen we de verhoudingen

$$\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|XU|}{|XV|} \qquad \text{en} \qquad \frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|XU|}{|XW|}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|XB|}{|XA|}\frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|XV|}{|XU|}\frac{|XU|}{|XW|} = \frac{|XV|}{|XW|}.$$

Met behulp van de machtstelling vanuit het punt $X$ op de koordenvierhoek $BCQR$ volgt nu

$$|XC| \cdot |XR| = |XB| \cdot |XQ| = \frac{|XB|}{|XC|} \cdot |XC| \cdot |XQ| = \frac{|XV|}{|XW|} \cdot |XC| \cdot |XQ|,$$

dus

$$|XW| \cdot |XR| = |XV| \cdot |XQ|.$$

Uit de gegeven configuratie ($X$ binnen de driehoek, $U$ en $P$ op de lijn $XP$ aan dezelfde kant van $X$) volgt dat $R$ en $W$ op de lijn $XC$ aan dezelfde kant van $X$ liggen, en ook $V$ en $Q$ op de lijn $XB$ liggen aan dezelfde kant van $X$. Dus geldt ook zonder absoluutstrepen: $XW \cdot XR = XV \cdot XQ$. De machtstelling zegt vervolgens dat dan $W$, $R$, $V$ en $Q$ op een cirkel liggen. □

**Oplossing II.** Omdat $AB$ en $UV$ evenwijdig zijn, geldt $\triangle ABX \sim \triangle UVX$ (hh). Zo ook is $\triangle ACX \sim \triangle UWX$. Met deze gelijkvormigheden kunnen we $\frac{|XU|}{|XA|}$ op twee manieren uitdrukken:

$$\frac{|UV|}{|AB|} = \frac{|XU|}{|XA|} = \frac{|UW|}{|AC|}.$$

Verder volgt uit de evenwijdigheden ook

$$\angle VUW = \angle VUA + \angle AUW = \angle BAU + \angle UAC = \angle BAC.$$

Nu zien we dat $\triangle VUW \sim \triangle BAC$ (zhz). Hieruit volgt, samen met Z-hoeken (beide bij het tweede =-teken):

$$\angle WVB = \angle WVU - \angle BVU = \angle CBA - \angle VBA = \angle CBV.$$

Bekijk nu de configuratie dat $V$ tussen $Q$ en $X$ ligt en $W$ tussen $X$ en $R$. Dan geldt

$$\angle CBV = \angle CBQ = \angle CRQ = \angle WRQ,$$

dus

$$180^\circ - \angle WVQ = \angle WVB = \angle CBV = \angle WRQ.$$

Dit betekent dat $WVQR$ een koordenvierhoek is.
Bij andere configuraties waarbij $V \neq Q$ en $W \neq R$ verloopt het bewijs analoog. Als $V = Q$ of $W = R$, dan zijn de vier punten $W$, $R$, $V$ en $Q$ er in feite maar drie (of nog minder), die dus zeker samen op een cirkel liggen. □

**Oplossing III.** Als $V = Q$ of $W = R$, dan zijn de vier punten $W$, $R$, $V$ en $Q$ er in feite maar drie (of nog minder), die dus zeker samen op een cirkel liggen. Bekijk nu de configuratie dat $U$ tussen $X$ en $P$ ligt, $V$ tussen $Q$ en $X$, en $W$ tussen $X$ en $R$. Het bewijs in andere configuraties gaat analoog, tenzij $U = P$. Dat geval behandelen we aan het eind nog even.
Wegens Z-hoeken geldt

$$\angle WUA = \angle PAC = \angle PRC = \angle PRW.$$

Dus $\angle PUW = 180° - \angle WUA = 180° - \angle PRW$, waaruit we concluderen dat $PUWR$ een koordenvierhoek is. Op een vergelijkbare manier kunnen we laten zien dat $PUVQ$ een koordenvierhoek is. Nu passen we de machtstelling toe vanuit het punt $X$ op beide koordenvierhoeken:

$$XW \cdot XR = XU \cdot XP = XV \cdot XQ.$$

Nu zegt de machtstelling weer dat $W$, $R$, $V$ en $Q$ op een cirkel liggen.
Bekijk nu het geval dat $U = P$. Wegens Z-hoeken geldt

$$\angle WUA = \angle UAC = \angle URC = \angle URW.$$

Bekijk de cirkel door $U$, $W$ en $R$. Daar is $\angle URW$ de omtrekshoek op koorde $UW$. Omdat $\angle WUA$ even groot is, is dat blijkbaar de raaklijnhoek op die koorde, dus raakt $AU$ aan de cirkel. Daaruit volgt dat de macht van $X$ ten opzichte van deze cirkel gelijk is aan $XU^2$. Analoog is de macht van $X$ ten opzichte van de cirkel door $U$, $V$ en $Q$ ook gelijk aan $XU^2$. Dus

$$XW \cdot XR = XU^2 = XV \cdot XQ.$$

Nu zegt de machtstelling weer dat $W$, $R$, $V$ en $Q$ op een cirkel liggen. $\square$

**Opgave 3.** Bepaal alle paren positieve gehele getallen $(x, y)$ waarvoor

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 - 5).$$

---

**Oplossing I.** We kunnen de vergelijking als volgt herschrijven:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 4xy(x + y) - 20.$$

Nu is $x + y$ een deler van de linkerkant en van de eerste term rechts, dus ook van de tweede term rechts: $x + y \mid 20$. Omdat $x + y \geq 2$, geeft dit voor $x + y$ de mogelijkheden $2, 4, 5, 10, 20$. Als van $x$ en $y$ er precies één even en één oneven is, is de linkerkant van de vergelijking oneven en de rechterkant even, tegenspraak. Dus $x + y$ is even, waarmee $x + y = 5$ afvalt. Als $x + y = 2$, geldt $x = y = 1$ en dan staat links iets positiefs en rechts iets negatiefs, dus deze mogelijkheid valt ook af.
Om de andere mogelijkheden te proberen, schrijven we de vergelijking nog iets anders:

$$(x + y)\big((x + y)^2 - 3xy\big) = 4xy(x + y) - 20.$$

Als $x + y = 4$, staat er $4 \cdot (16 - 3xy) = 16xy - 20$, dus $16 - 3xy = 4xy - 5$, dus $21 = 7xy$, oftewel $xy = 3$. Dus geldt $(x, y) = (3, 1)$ of $(x, y) = (1, 3)$. Allebei de paren voldoen.
Als $x + y = 10$, krijgen we $100 - 3xy = 4xy - 2$, dus $7xy = 102$. Maar 102 is niet deelbaar door 7, dus dit kan niet.
Als $x + y = 20$, krijgen we $400 - 3xy = 4xy - 1$, dus $7xy = 401$. Maar 401 is niet deelbaar door 7, dus dit kan niet.
Hiermee hebben we alle mogelijkheden gehad, dus we concluderen dat $(1, 3)$ en $(3, 1)$ de enige oplossingen zijn. □

**Oplossing II.** Er geldt $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, dus uit de gegeven vergelijking volgt

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 \\ &= 4(x^2y + xy^2 - 5) + 3x^2y + 3xy^2 \\ &= 7x^2y + 7xy^2 - 20 \\ &= 7xy(x + y) - 20.\end{aligned}$$

Omdat $x + y$ een deler is van $(x + y)^3$ en van $7xy(x + y)$, is $x + y$ ook een deler van 20. Omdat $x + y \geq 2$, geeft dit voor $x + y$ de mogelijkheden 2, 4, 5, 10, 20.
Nu lezen we $(x + y)^3 = 7xy(x + y) - 20$ modulo 7, dan krijgen we

$$(x + y)^3 \equiv -20 \equiv 1 \mod 7.$$

We proberen voor alle mogelijkheden van $x + y$ of de derde macht congruent aan 1 modulo 7 is. Er geldt $5^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv -1 \mod 7$, dus $x + y = 5$ kan niet. Er geldt

$10^3 \equiv 3^3 = 27 \equiv -1 \mod 7$, dus $x+y=10$ kan ook niet. Er geldt $20^3 \equiv (-1)^3 = -1 \mod 7$, dus ook $x+y=20$ kan niet. We houden alleen over $x+y=2$ en $x+y=4$.
Als $x+y=2$, geldt $x=y=1$ en dan staat links iets positiefs en rechts iets negatiefs, dus deze mogelijkheid valt ook af. Als $x+y=4$, is $(x,y)$ gelijk aan $(1,3)$, $(2,2)$ of $(3,1)$. Invullen laat zien dat alleen $(1,3)$ en $(3,1)$ voldoen. $\square$

---

**Opgave 4.** Zij $ABCD$ een convexe vierhoek (d.w.z. alle binnenhoeken zijn kleiner dan $180°$), zodat er een punt $M$ op lijnstuk $AB$ en een punt $N$ op lijnstuk $BC$ bestaan met de eigenschap dat $AN$ de vierhoek in twee stukken van gelijke oppervlakte deelt, en $CM$ dat ook doet.
Bewijs dat $MN$ de diagonaal $BD$ middendoor deelt.

---

**Oplossing I.** Noteer de oppervlakte van veelhoek $\mathcal{P}$ met $O(\mathcal{P})$. Laat $S$ het snijpunt van $AN$ en $CM$ zijn. Er geldt

$$O(ASM)+O(SMBN) = O(ABN) = \tfrac{1}{2}O(ABCD) = O(CBM) = O(CNS)+O(SMBN),$$

dus $O(ASM) = O(CNS)$. Als we hier links en rechts $O(SMN)$ bij optellen, vinden we dat $O(MNA) = O(MNC)$. Deze driehoeken hebben dezelfde basis $MN$ en dus kennelijk ook dezelfde hoogte. Dat betekent dat de lijn $AC$ evenwijdig is aan de basis $MN$.
Laat nu $X$ en $Y$ de snijpunten zijn van respectievelijk $AB$ en $BC$ met de lijn door $D$ die evenwijdig aan $AC$ (en dus ook evenwijdig aan $MN$) loopt. De driehoeken $ACY$ en $ACD$ hebben dezelfde basis $AC$ en dezelfde hoogte, dus $O(ACY) = O(ACD)$. Hieruit volgt

$$O(ANY) = O(ANC) + O(ACY) = O(ANC) + O(ACD) = O(ANCD) = O(ANB),$$

waarbij de laatste gelijkheid geldt omdat $AN$ de vierhoek in twee stukken van gelijke oppervlakte deelt. De driehoeken $ANY$ en $ANB$ hebben dezelfde hoogte, dus moeten ze ook dezelfde basis hebben. Dus $N$ is het midden van $BY$.
Zo ook laten we zien dat $M$ het midden is van $BX$. We vinden dat $MN$ een middenparallel van $\triangle BXY$ is. Omdat $D$ op $XY$ ligt, snijdt $MN$ het lijnstuk $BD$ middendoor. $\square$

**Alternatief bewijs voor $AC \parallel MN$.** Er geldt $O(ABN) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BN| \cdot \sin\angle B$ en $O(MBC) = \frac{1}{2} \cdot |MB| \cdot |BC| \cdot \sin\angle B$. Omdat ook geldt $O(ABN) = \frac{1}{2}O(ABCD) = O(MBC)$, zien we dat

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BN| \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot |MB| \cdot |BC| \cdot \sin\angle B,$$

oftewel

$$|AB| \cdot |BN| = |MB| \cdot |BC|.$$

Dat betekent

$$\frac{|MB|}{|BN|} = \frac{|AB|}{|BC|},$$

waaruit met (zhz) volgt dat $\triangle MBN \sim \triangle ABC$. Hieruit volgt dat $\angle NMB = \angle CAB$, dus zien we met F-hoeken dat $MN \parallel AC$. $\square$

**Oplossing II.** Noteer de oppervlakte van veelhoek $\mathcal{P}$ met $O(\mathcal{P})$. Noem $T$ het midden van $BD$. Nu hebben driehoeken $CDT$ en $CBT$ een even lange basis, namelijk $|DT| = |BT|$, en dezelfde hoogte, dus zijn hun oppervlaktes gelijk. Op dezelfde manier geldt $O(ADT) = O(ABT)$. Dus $O(ATCD) = \frac{1}{2}O(ABCD) = O(ANCD)$. Merk nu op dat $T$ niet binnen driehoek $ACD$ kan liggen, want dan zou $O(ATCD) < O(ACD)$, terwijl juist $O(ANCD) > O(ACD)$. Dus

$$O(ATC) = O(ATCD) - O(ACD) = O(ANCD) - O(ACD) = O(ANC).$$

Driehoeken $ATC$ en $ANC$ hebben dezelfde basis $AC$, dus ze hebben gelijke hoogte. Dat betekent dat de lijn $NT$ evenwijdig is aan de basis $AC$.
Op analoge manier laten we zien dat $MT$ evenwijdig is aan $AC$. Dus $NT \parallel MT$ en daaruit volgt dat $M$, $N$ en $T$ op één lijn liggen. Dus $MN$ gaat door het midden van $BD$. $\square$

**Opgave 5.** Laat $A$ een verzameling van positieve gehele getallen zijn met de volgende eigenschap: voor elk positief geheel getal $n$ zit precies één van de drie getallen $n$, $2n$ en $3n$ in $A$. Verder is gegeven dat $2 \in A$. Bewijs dat $13824 \notin A$.

---

**Oplossing.** We bewijzen de volgende twee beweringen:

(i) Als $m \in A$ met $2 \mid m$, dan $6m \in A$.

(ii) Als $m \in A$ met $3 \mid m$, dan $\frac{4}{3}m \in A$.

Eerst bewering (i). Neem aan dat $m \in A$ met $2 \mid m$. Door $n = \frac{m}{2}$ te kiezen, zien we dat $\frac{m}{2}$ en $\frac{3}{2}m$ niet in $A$ zitten. Door $n = m$ te kiezen, zien we dat $2m$ en $3m$ niet in $A$ zitten. Als we nu $n = \frac{3}{2}m$ bekijken, dan blijkt $2n = 3m$ niet in $A$ te zitten en $n = \frac{3}{2}m$ zelf ook niet, dus $3n = \frac{9}{2}m$ wel. Met $n = \frac{9}{2}m$ krijgen we nu dat $9m \notin A$. Ten slotte bekijken we $n = 3m$: we weten dat $3m \notin A$ en $9m \notin A$, dus $6m \in A$.
Nu bewering (ii). Neem aan dat $m \in A$ met $3 \mid m$. Door $n = \frac{m}{3}$ te kiezen, zien we dat $\frac{m}{3}$ en $\frac{2}{3}m$ niet in $A$ zitten. Door $n = m$ te kiezen, zien we dat $2m$ niet in $A$ zit. Als we nu $n = \frac{2}{3}m$ kiezen, hebben we dus dat $n$ en $3n$ niet in $A$ zitten, dus zit $2n = \frac{4}{3}m$ dat wel. Dit bewijst bewering (ii).
We weten dat $2 \in A$. Door herhaaldelijk beweringen (i) en (ii) toe te passen, kunnen we laten zien dat de volgende getallen ook allemaal in $A$ zitten:

$$2 \overset{\text{(i)}}{\to} 2^2 \cdot 3 \overset{\text{(i)}}{\to} 2^3 \cdot 3^2 \overset{\text{(i)}}{\to} 2^4 \cdot 3^3 \overset{\text{(i)}}{\to} 2^5 \cdot 3^4 \overset{\text{(ii)}}{\to} 2^7 \cdot 3^3 \overset{\text{(ii)}}{\to} 2^9 \cdot 3^2.$$

Omdat $2^9 \cdot 3^2 \in A$, geldt $2^9 \cdot 3^3 \notin A$. Aangezien $13824 = 2^9 \cdot 3^3$, is dit wat we moesten bewijzen. $\square$