Toets 16 maart 2012

Elke opgave is 7 punten waard.

Opgave 1. Bestaan er kwadratische polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ met reële coëfficiënten zodat het polynoom $P(Q(x))$ als nulpunten precies $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$ en $x = 7$ heeft?

Opgave 2. Zij ABC een driehoek en zij X een punt binnen de driehoek. De lijnen XA, XB en XC snijden de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ nogmaals in respectievelijk P, Q en R. Zij U een punt op de halfrechte XP (d.w.z. op de lijn XP zodat P en U aan dezelfde kant van X liggen). De lijn door U evenwijdig aan AB snijdt BQ in V. De lijn door U evenwijdig aan AC snijdt CR in W.
Bewijs dat Q, R, V en W op één cirkel liggen.

Opgave 3. Bepaal alle paren positieve gehele getallen (x, y) waarvoor

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 - 5).$$

Opgave 4. Zij $ABCD$ een convexe vierhoek (d.w.z. alle binnenhoeken zijn kleiner dan $180°$), zodat er een punt M op lijnstuk AB en een punt N op lijnstuk BC bestaan met de eigenschap dat AN de vierhoek in twee stukken van gelijke oppervlakte deelt, en CM dat ook doet.
Bewijs dat MN de diagonaal BD middendoor deelt.

Opgave 5. Laat A een verzameling van positieve gehele getallen zijn met de volgende eigenschap: voor elk positief geheel getal n zit precies één van de drie getallen n, $2n$ en $3n$ in A. Verder is gegeven dat $2 \in A$. Bewijs dat $13824 \notin A$.