Uitwerkingen toets maart 2010

Opgave 1. Zij $ABCD$ een trapezium met $AB \parallel CD$, $2|AB| = |CD|$ en $BD \perp BC$. Zij M het midden van CD en zij E het snijpunt van BC en AD. Zij O het snijpunt van AM en BD. Zij N het snijpunt van OE en AB.

(a) Bewijs dat $ABMD$ een ruit is.

(b) Bewijs dat de lijn DN door het midden van lijnstuk BE gaat.

Oplossing I. Uit $2|AB| = |CD|$ en $AB \parallel CD$ volgt dat AB een middenparallel in driehoek CDE is. Dus A is het midden van DE. Omdat $\angle DBE = 90°$, geldt volgens Thales dat A het middelpunt is van de cirkel door D, B en E. Dus $|AD| = |AE| = |AB|$ en we wisten al dat $|AB| = |DM| = |MC|$. Op dezelfde manier met Thales laten we zien dat $|BM| = |CM| = |DM|$, dus van vierhoek $ABMD$ zijn alle zijden even lang. Het is dus een ruit (a). De diagonalen van een ruit delen elkaar middendoor, dus O is het midden van BD. Omdat A ook het midden van DE is, is N het zwaartepunt van driehoek BDE. Dus DN gaat door het midden van BE (b). $\square$

Oplossing II. Omdat AB en DM evenwijdig zijn en $|AB| = \frac{1}{2}|CD| = |DM|$, is $ABMD$ een parallellogram. Wegens $AB \parallel CD$ en $|CD| = 2|AB|$ geldt verder $\triangle EAB \sim \triangle EDC$ met vergrotingsfactor 2. Dus A is het midden van DE. Daarom is AM de middenparallel in $\triangle ECD$ evenwijdig aan EC. Omdat EC en BD loodrecht op elkaar staan (wegens $BD \perp BC$) staan ook AM en BD loodrecht op elkaar. Dus $ABMD$ is een parallellogram waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Dus $ABMD$ is een ruit (a). Onderdeel (b) gaat hetzelfde als in de eerste oplossing. $\square$

Opgave 2. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing. Merk eerst op dat de functie $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ niet voldoet. Er is dus zeker een $x_0 \in \mathbb{R}$ waarvoor $f(x_0) \neq 0$. Vul nu $x = x_0$ en $y = 0$ in: $f(x_0)f(0) = f(x_0)$. We mogen delen door $f(x_0)$, waardoor we krijgen: $f(0) = 1$. Vul nu $x = 1$ en $y = -1$ in: $f(1)f(-1) = f(0) - 1 = 1 - 1 = 0$. Dus $f(1) = 0$ of $f(-1) = 0$.
We onderscheiden gevallen. Stel eerst dat $f(1) = 0$ en vul $x = 1$ in: $0 = f(1)f(y) = f(1+y) + y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$, dus $f(1+y) = -y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Substitueren we nu $y = t-1$, dan zien we $f(t) = -t+1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Dit is onze eerste kandidaatoplossing.
Stel nu dat $f(-1) = 0$ en vul $x = -1$ in: $0 = f(-1)f(y) = f(-1+y) - y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$, dus $f(-1+y) = y$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Substitueren we nu $y = t+1$, dan zien we $f(t) = t+1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Dit is onze tweede kandidaatoplossing.
We hebben alle gevallen gehad, dus er zijn twee mogelijke oplossingen. We controleren ze allebei. Stel eerst dat $f(t) = -t+1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dan geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x)f(y) = (-x+1)(-y+1) = xy - x - y + 1 = (-x-y+1) + xy = f(x+y) + xy.$$

Stel nu dat $f(t) = t+1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dan geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy + x + y + 1 = (x+y+1) + xy = f(x+y) + xy.$$

Beide oplossingen voldoen dus. $\square$

Opgave 3. Zij N het aantal geordende vijftallen $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ van positieve gehele getallen waarvoor geldt

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

(Bij geordende vijftallen doet de volgorde er toe, dus $(2, 3, 15, 15, 30)$ en $(15, 2, 15, 3, 30)$ zijn verschillende geordende vijftallen.)
Is N een even of een oneven getal?

Oplossing I. Bekijk een ongeordend vijftal dat voldoet en stel dat het uit de verschillende getallen $b_1, \ldots, b_k$ bestaat (met $k \leq 5$), waarbij b_i precies t_i keer voorkomt. Er geldt dus $t_1 + \cdots + t_k = 5$. Nu geldt dat dit vijftal op $\frac{5!}{t_1! \cdots t_k!}$ manieren geordend kan worden. Dit is oneven dan en slechts dan als in de noemer drie factoren 2 zitten. Dat geldt dan en slechts dan als er 4! of 5! in de noemer voorkomt. Kortom, de enige ongeordende vijftallen die op een oneven aantal manieren geordend kunnen worden, zijn die bestaande uit minstens vier dezelfde getallen.
Zo'n vijftal ziet er dus uit als (a, a, a, a, b), waarbij b eventueel gelijk zou kunnen zijn aan a en waarbij a en b positieve gehele getallen zijn. We krijgen de vergelijking $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$, oftewel $4b + a = ab$. We zien dat b een deler moet zijn van a en dat a een deler moet zijn van $4b$. Er zijn dus drie opties: $a = b$, $a = 2b$ en $a = 4b$. In het eerste geval krijgen we $5b = b^2$, dus $b = 5$. Dit geeft de oplossing $(5, 5, 5, 5, 5)$. In het tweede geval krijgen we $6b = 2b^2$, dus $b = 3$. Dit geeft de oplossing $(6, 6, 6, 6, 3)$. In het derde geval krijgen we $8b = 4b^2$, dus $b = 2$. Dit geeft de oplossing $(8, 8, 8, 8, 2)$. Er zijn dus drie ongeordende vijftallen die op een oneven aantal manieren geordend kunnen worden. Dus N is oneven. $\square$

Oplossing II. Zij $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ een geordend vijftal dat voldoet. Dan voldoet ook het vijftal $(a_2, a_1, a_3, a_4, a_5)$. Als $a_1 \neq a_2$, is dit echt een ander vijftal. Zo zien we dat er een even aantal oplossingen $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ met $a_1 \neq a_2$ is. We bekijken nu verder alleen de oplossingen met $a_1 = a_2$. Op dezelfde manier zien we dat er een even aantal oplossingen $(a_1, a_1, a_3, a_4, a_5)$ met $a_3 \neq a_4$ is. We bekijken nu verder alleen de oplossingen met $a_1 = a_2$ en $a_3 = a_4$. Voor elke oplossing $(a_1, a_1, a_3, a_3, a_5)$ met $a_1 \neq a_3$ is er nog een andere oplossing $(a_3, a_3, a_1, a_1, a_5)$, dus ook van de oplossingen $(a_1, a_1, a_3, a_3, a_5)$ met $a_1 \neq a_3$ is er een even aantal. We bekijken nu verder alleen de oplossingen van de vorm (a, a, a, a, b), waarbij b eventueel nog gelijk aan a zou kunnen zijn.
We krijgen de vergelijking $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$, oftewel $4b + a = ab$. Dit kunnen we herschrijven als $(a - 4)(b - 1) = 4$. Omdat b een positief geheel getal moet zijn, geldt $b - 1 \geq 0$. Dus $b - 1$ is een positieve deler van 4, te weten 1, 2 of 4. Dit leidt tot respectievelijk $(a, b) = (8, 2)$, $(a, b) = (6, 3)$ en $(a, b) = (5, 5)$. Dit zijn drie oplossingen. Het aantal eerder beschouwde oplossingen is even, dus N is oneven. $\square$

Opgave 4. De twee cirkels Γ_1 en Γ_2 snijden elkaar in P en Q. De gemeenschappelijke raaklijn aan de kant van P raakt de cirkels in A resp. B. De raaklijn aan Γ_1 in P snijdt Γ_2 voor de tweede keer in C en de raaklijn aan Γ_2 in P snijdt Γ_1 voor de tweede keer in D. Het snijpunt van de lijnen AP en BC noemen we E en het snijpunt van de lijnen BP en AD noemen we F. Zij M de puntspiegeling van P in het midden van AB. Bewijs dat $AMBEQF$ een koordenzeshoek is.

Oplossing. We gaan alle relevante hoeken uitdrukken in $\alpha = \angle BAP$ en $\beta = \angle PBA$. Het midden van AB is per definitie ook het midden van PM, dus de diagonalen van vierhoek $APBM$ snijden elkaar middendoor. Daarom is $APBM$ een parallellogram en geldt $\angle AMB = \angle APB$. Wegens hoekensom van $\triangle ABP$ geldt $\angle APB + \alpha + \beta = 180°$. Dus $180° - \angle AMB = \alpha + \beta$.

Wegens de raaklijnomtrekshoekstelling met raaklijn AB aan Γ_1 geldt $\alpha = \angle ADP$. Vervolgens volgt uit de omtrekshoekstelling op koorde AP van Γ_1 dat $\angle ADP = \angle AQP$. Dus $\alpha = \angle AQP$. Zo ook $\beta = \angle PCB = \angle PQB$. Dus $\angle AQB = \angle AQP + \angle PQB = \alpha + \beta = 180° - \angle AMB$. Hieruit concluderen we dat $AQBM$ een koordenvierhoek is.

Zij S het snijpunt van DP en AB. Met de raaklijnomtrekshoekstelling zien we dat $\angle SPB = \angle PCB = \angle PBS = \angle PBA = \beta$. Dus $\angle DPF = \angle SPB = \beta$ wegens overstaande hoeken. Nu passen we de buitenhoekstelling toe op $\triangle DFP$, zodat geldt: $\angle AFB = \angle AFP = \angle FDP + \angle DPF = \alpha + \beta = \angle AQB$. Dus $AFQB$ is een koordenvierhoek. Daaruit volgt dat F op de omgeschreven cirkel van koordenvierhoek $AQBM$ ligt. Analoog zien we dat E daar ook op ligt. Dus $AMBEQF$ is een koordenzeshoek. $\square$

Opgave 5. Voor een niet-negatief geheel getal n noemen we een permutatie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ van $\{0, 1, \dots, n\}$ *kwadratisch* als $k + a_k$ een kwadraat is voor $k = 0, 1, \dots, n$. Bewijs dat er voor elke niet-negatieve gehele n een kwadratische permutatie van $\{0, 1, \dots, n\}$ bestaat.

Oplossing. We bewijzen dit met inductie naar n. Voor $n = 0$ werkt de permutatie (0), want $0+0$ is een kwadraat. Zij nu $l \geq 0$ en neem aan dat er voor elke $n \leq l$ een kwadratische permutatie bestaat (de inductiehypothese). We bekijken $n = l+1$. Zij m zodat m^2 het kleinste kwadraat groter dan of gelijk aan $l+1$ is. Nu geldt $l \geq (m-1)^2 = m^2 - 2m + 1$, dus $2(l+1) \geq 2m^2 - 4m + 4 = m^2 + (m-2)^2 \geq m^2$. Dit betekent dat we een gehele p met $0 \leq p \leq l+1$ kunnen vinden zodat $(l+1) + p = m^2$. Nu definiëren we onze permutatie als volgt. Als $p \geq 1$, nemen we voor $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ een kwadratische permutatie van $\{0, 1, \dots, p-1\}$; deze bestaat volgens de inductiehypothese omdat $p - 1 \leq l$. Voor $p \leq i \leq l+1$ definiëren we $a_i = m^2 - i$. (Merk op dat we voor $p = 0$ nu ook een volledige permutatie hebben gedefinieerd.) Het rijtje $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_{l+1})$ is nu precies $(l+1, l, \dots, p)$, zodat we samen met het beginstuk nu alle waarden van 0 tot en met $l+1$ gebruikt hebben. Verder is $a_i + i$ een kwadraat voor alle i. Dus $(a_0, a_1, \dots, a_{l+1})$ is een kwadratische permutatie van $\{0, 1, \dots, l+1\}$. $\square$