

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 15 maart 2013

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

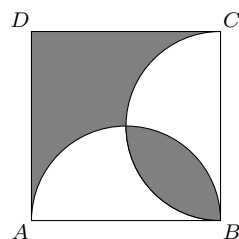
Bij de B-opgaven is het antwoord steeds een getal, dat je op het antwoordformulier moet invullen. Een goed antwoord levert 4 punten op, een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is. LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of 5^8 of $\frac{1}{4}(\sqrt{5} + \pi)$.

- B1.** Een aantal scholieren deed mee aan een test waar je 100 punten voor kon halen. Iedereen scoorde minstens 60 punten. Precies vijf scholieren scoorden 100 punten. De gemiddelde score van de deelnemende scholieren was 76 punten.

Hoeveel scholieren deden er minstens mee aan deze test?

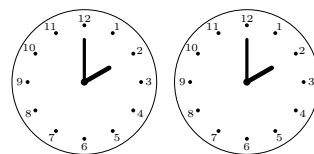
- B2.** Gegeven is een vierkant $ABCD$ waarvan de zijden lengte 4 hebben. Aan de binnenkant van het vierkant zijn twee halve cirkels met middellijnen AB en BC getekend (zie figuur).

Wat is de gezamenlijke oppervlakte van de twee grijze gebieden?



- B3.** De wijzers van twee klokken, zoals die in de figuur hiernaast, draaien met constante snelheid rond. Beide klokken lopen niet meer goed; de een loopt precies 1% sneller dan de werkelijke tijd, en de ander zelfs precies 5% sneller dan de werkelijke tijd. Op een bepaald moment wijzen ze allebei precies 2 uur aan. Na verloop van tijd wijzen de klokken voor het eerst opnieuw dezelfde tijd aan.

Welke tijd wijzen ze op dat moment aan?

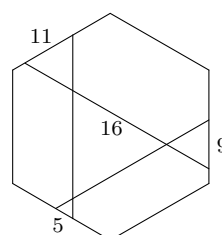


- B4.** In het getallenvierkant hiernaast staan positieve getallen. Het *product* van de getallen in iedere rij, iedere kolom en elk van de twee diagonalen is steeds hetzelfde.

Welk getal staat op de plaats van H ?

$\frac{1}{2}$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

- B5.** Een regelmatige zeshoek is door lijnen evenwijdig aan de zijden in zeven stukken verdeeld zoals in de figuur. Vier van de stukken zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan de lengtes van de zijden in de figuur aangegeven zijn. Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek?



GA VERDER OP DE ACHTERKANT

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. We noemen een positief geheel getal van n cijfers ($n \geq 3$ en $n \leq 9$) *bovengemiddeld* als het voldoet aan de volgende twee eisen:

- het getal bevat alle cijfers van 1 tot en met n precies één keer;
- voor elk cijfer behalve de eerste twee geldt: het dubbele van het cijfer is minstens zo groot als de som van de twee cijfers die er direct voor staan.

Zo is 31254 bovengemiddeld, want het bestaat uit de cijfers 1 tot en met 5 en verder geldt

$$2 \cdot 2 \geq 3 + 1, \quad 2 \cdot 5 \geq 1 + 2 \quad \text{en} \quad 2 \cdot 4 \geq 2 + 5.$$

- Geef een bovengemiddeld getal van 4 cijfers waarvan het eerste cijfer een 4 is.
- Laat zien dat er geen bovengemiddeld getal van 4 cijfers is waarvan het tweede cijfer een 4 is.
- Bepaal voor bovengemiddelde getallen van 7 cijfers alle mogelijke posities van het cijfer 7.

C2. We noemen een drietal (x, y, z) *goed* als x, y en z positieve gehele getallen zijn met $y \geq 2$ en er bovendien geldt dat $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.

Een voorbeeld van een goed drietal is $(19, 6, 16)$, want er geldt: $6 \geq 2$ en $19^2 - 3 \cdot 6^2 = 16^2 - 3$.

- Laat zien dat er voor elk *oneven* getal $x \geq 5$ minstens twee goede drietallen (x, y, z) bestaan.
- Vind een goed drietal (x, y, z) waarbij x *even* is.