Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 23 maart 2012

Uitwerkingen

B-opgaven

$$\begin{array}{rrrrrrl} \mathrm{T} & \mathrm{W} & \mathrm{E} & \mathrm{E} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \\ & \mathrm{R} & \mathrm{O} & \mathrm{N} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & + \\ \hline 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 & \end{array}$$

B1. 32 We werken van rechts naar links door de optelling. Er geldt $2\mathrm{E} = 12$ of $2\mathrm{E} = 2$. Het tweede geval valt af omdat $2\mathrm{D}$ dan gelijk zou zijn aan 1 of 11. Dus $\mathrm{E} = 6$.

Er geldt $\mathrm{D} = 0$ of $\mathrm{D} = 5$. Het tweede geval valt af want dan zou $\mathrm{E} + \mathrm{N} + 1 = 13$ oftewel $\mathrm{N} = 6$ gelden, terwijl de 6 al door E is bezet. We concluderen dat $\mathrm{D} = 0$ en $\mathrm{E} + \mathrm{N} = 13$, zodat $\mathrm{N} = 7$.

Uit $\mathrm{E} + \mathrm{O} + 1 = 10$ volgt dat $\mathrm{O} = 3$. We zien dat $\mathrm{W} + \mathrm{R} = 12$ of $\mathrm{W} + \mathrm{R} = 2$. Het tweede geval valt af, want de 0 is al bezet, zodat $\mathrm{W} + \mathrm{R} \geqslant 1 + 2 = 3$. Dus $\mathrm{W} + \mathrm{R} = 12$ (en $\mathrm{T} = 1$).

De mogelijkheden voor het paar $\{\mathrm{W}, \mathrm{R}\}$ zijn $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$ en $\{5, 7\}$. De eerste en laatste mogelijkheid vallen af, want cijfers 3 en 7 zijn al bezet. We concluderen dat $\mathrm{W} \cdot \mathrm{R} = 8 \cdot 4 = 32$.

B2. 70 We kunnen in één weide 23 kamelen zetten en in de andere 39 weides achtereenvolgens $32, 33, 34, \ldots, 70$ kamelen, waarbij de laatste weide die in het centrum van Amsterdam is. Het totaal aantal kamelen is dan inderdaad gelijk aan $23 + (32 + 33 + \cdots + 70) = 23 + 39 \cdot \frac{32+70}{2} = 2012$. Er is dus een verdeling met 70 kamelen in de weide in het centrum van Amsterdam.

Met minder dan 70 kan het niet. Stel maar dat er hooguit 69 kamelen in de weide in het centrum van Amsterdam worden geplaatst. Omdat het aantal kamelen overal verschillend is, krijgt de op één na drukste weide hooguit 68 kamelen, de op twee na drukste krijgt hooguit 67 kamelen, et cetera. In totaal zijn er dan hooguit $69 + 68 + \ldots + 30 = 40 \cdot \frac{30+69}{2} = 1980$ kamelen verdeeld over de weides en blijven er minstens 32 kamelen over. Er is dus geen oplossing met minder dan 70 kamelen in de weide in het centrum van Amsterdam. Het minimale aantal is dus 70.

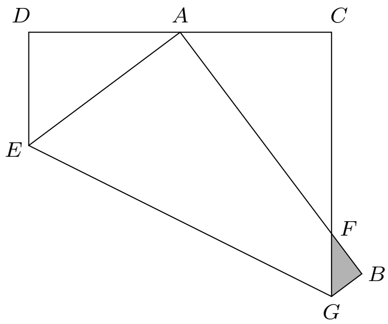
B3. 5 Bekijk eerst het geval waarin Anne heeft gestolen van de koning. Dan zijn de twee laatste uitspraken van Bert en Chris waar en die van Anne en Dirk onwaar. Anne en Dirk zijn dus leugenaars. Aangezien de twee uitspraken van Chris allebei waar zijn, is Chris geen leugenaar. Daaruit concluderen we dat Bert een leugenaar is, want zijn eerste uitspraak is gelogen. Nu we van iedereen weten of hij/zij een leugenaar is, tellen we eenvoudig dat van de acht uitspraken er vijf waar zijn.

Je kunt een soortgelijke redenering houden voor de gevallen waarin Bert, Chris en Dirk hebben gestolen van de koning. Omdat het probleem symmetrisch is (cyclisch verwisselen van de namen 'Anne', 'Bert', 'Chris' en 'Dirk' verandert het probleem niet), vinden we telkens hetzelfde antwoord: vijf van de uitspraken zijn waar.

B4. -178 Kleur de 10.000 vakjes volgens een schaakbordpatroon: de vakjes linksboven en rechtsonder worden wit en de vakjes linksonder en rechtsboven worden zwart. Bekijk de $99 \cdot 99 = 9801$ vierkanten van 2×2. Noem de 4901 vierkanten waarvan het vakje linksboven wit is de *witte vierkanten* en de 4900 vierkanten waarvan het vakje linksboven zwart is de *zwarte vierkanten*. Tel de vier getallen binnen elk wit vierkant op en tel daarna die 4901 resultaten op (sommige vakjes worden dus dubbel geteld!). Noem de uitkomst W. Doe hetzelfde voor de zwarte vierkanten, met uitkomst Z. Omdat het aantal witte vierkanten één meer is dan het aantal zwarte vierkanten, geldt $W - Z = 20$.

Bekijk nu hoe vaak elk vakje in totaal wordt meegenomen. De vakjes in de vier hoeken tellen elk slechts in één wit vierkant mee. De andere vakjes aan de rand tellen elk in precies één wit en één zwart vierkant mee. De overige vakjes tellen elk in precies twee zwarte en twee witte vierkanten mee. In het totaal $W - Z$ tellen dus alleen de vier hoekvakjes mee, elk precies eenmaal. Voor het getal x in het vakje rechtsonder vinden we dat $x + 0 + 99 + 99 = W - Z = 20$, dus $x = -178$.

B5. $\frac{2}{3}$ We introduceren de punten E, F en G zoals aangegeven in de figuur. Stel nu dat $|DE| = x$. Dan geldt $|AE| = 8 - x$, omdat de zijde van het vierkant lengte 8 heeft. Met de stelling van Pythagoras volgt $(8-x)^2 = |AE|^2 = |DE|^2 + |AD|^2 = x^2 + 16$. Oplossen geeft $x = 3$. Merk op dat $\angle CAF = 180° - \angle DAE - \angle EAB = 90° - \angle DAE = \angle DEA$. Verder geldt $\angle ADE = 90° = \angle FCA$. De driehoeken DEA en CAF zijn daarom gelijkvormig (hh). Hieruit volgt $\frac{1}{4}|AF| = \frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|EA|}{|DE|} = \frac{5}{3}$ en dus $|AF| = \frac{20}{3}$. Ook krijgen we $\frac{1}{4}|CF| = \frac{|CF|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{4}{3}$ en dus $|CF| = \frac{16}{3}$. Nu volgt dat $|BF| = 8 - |AF| = \frac{4}{3}$. Hoeken $\angle CFA$ en $\angle BFG$ zijn gelijk (overstaande hoeken). Bovendien zijn hoeken $\angle ACF$ en $\angle GBF$ beide $90°$ en dus gelijk. Daarom zijn driehoeken CFA en BFG gelijkvormig (hh). Hieruit volgt $\frac{3}{4}|BG| = \frac{|BG|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|CF|} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}$ en dus $|BG| = 1$. De oppervlakte van de grijze driehoek is nu $\frac{1}{2} \cdot |BG| \cdot |BF| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.



C-opgaven

C1. (a) Door de twee regels toe te passen kunnen we achtereenvolgens de volgende kaartjes maken: $12 \to 4 \to 9 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 21 \to 43 \to 87 \to 29$.

(b) In onderdeel (a) zagen we al dat we $3 = 2^2 - 1$ konden maken. Door daarna herhaaldelijk de eerste regel toe te passen vinden we dat we ook $2 \cdot (2^2 - 1) + 1 = 2^3 - 1$, $2 \cdot (2^3 - 1) + 1 = 2^4 - 1$, et cetera, kunnen maken. In het bijzonder kunnen we ook $2^{2012} - 1$ maken.

(c) Voor elk getal levert toepassen van regel 1 een *oneven* getal op. Toepassen van regel 2 op een *oneven* getal (als het een drievoud is), levert weer een *oneven* getal op. Zodra we ooit regel 1 toepassen, krijgen we met dat kaartje dus alleen nog maar *oneven* getallen. Om *even* getallen te maken moeten we dus direct regel 2 (herhaald) toepassen. De enige *even* getallen die we kunnen maken zijn dus 12 en 4.

C2. Merk op dat $\angle ESB = \angle DSC$ vanwege overstaande hoeken. Verder zijn driehoeken BES en SDC gelijkbenig waardoor geldt $\angle EBS = \angle ESB = \angle DSC = \angle DCS$. Hieruit volgt dat driehoeken BES en SDC gelijkvormig zijn (hh). In het bijzonder geldt $|BS| = \frac{|BS|}{|BE|} = \frac{|SC|}{|SD|} = \frac{1}{2}|SC| = |SM|$. Driehoek BSM is dus gelijkbenig en er volgt $\angle SBM = \angle SMB = \angle TMC$ vanwege overstaande hoeken. Vanwege het feit dat de hoekensom van een driehoek $180°$ is, vinden we $\angle TMC = 180° - \angle MTC - \angle TCM$ en dus ook $\angle ATB = 180° - \angle MTC = \angle TMC + \angle TCM$. We hadden al eerder gevonden dat $\angle TMC = \angle SBM$ en $\angle TCM = \angle DCS = \angle ABS$. Er geldt nu dus $\angle ATB = \angle SBM + \angle ABS = \angle ABT$. Hieruit volgt dat driehoek BAT gelijkbenig is met top A, dus $|AB| = |AT|$.