

# Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 16 september 2011  
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Hierbij telt niet alleen het (eind)antwoord; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel. Veel succes!

1. Bepaal alle drietallen positieve gehele getallen  $(a, b, n)$  waarvoor geldt dat

$$a! + b! = 2^n.$$

*Notatie:*  $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$ , dus bijvoorbeeld  $1! = 1$  en  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ .

2. Gegeven is een driehoek  $ABC$ . Op zijde  $BC$  liggen punten  $P$  en  $Q$  zó dat  $|BP| = |PQ| = |QC| = \frac{1}{3}|BC|$ . Op zijde  $CA$  liggen punten  $R$  en  $S$  zó dat  $|CR| = |RS| = |SA| = \frac{1}{3}|CA|$ . Op zijde  $AB$  liggen punten  $T$  en  $U$  zó dat  $|AT| = |TU| = |UB| = \frac{1}{3}|AB|$ . Gegeven is dat  $P, Q, R, S, T$  en  $U$  op één cirkel liggen.

Bewijs dat  $ABC$  een gelijkzijdige driehoek is.

3. Bij een toernooi met zes teams speelt ieder team eenmaal tegen elk ander team. Als een team een wedstrijd wint, krijgt het daarvoor 3 punten en krijgt de verliezer 0 punten. Als er gelijk wordt gespeeld, krijgen beide teams 1 punt.

Kunnen de eindscores van de teams precies zes opeenvolgende getallen  $a, a + 1, \dots, a + 5$  zijn? Zo ja, bepaal alle waarden van  $a$  waarvoor dat kan.

4. Bepaal alle paren positieve reële getallen  $(a, b)$  met  $a > b$  waarvoor geldt:

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = 134 \quad \text{en} \quad a\sqrt{b} + b\sqrt{a} = 126.$$

5. De telduivel heeft alle gehele getallen gekleurd: elk getal is nu óf zwart óf wit. Het getal 1 is wit. Voor elk tweetal witte getallen  $a$  en  $b$  (de getallen  $a$  en  $b$  mogen hetzelfde zijn) hebben  $a - b$  en  $a + b$  verschillende kleuren.

Bewijs dat het getal 2011 wit is.