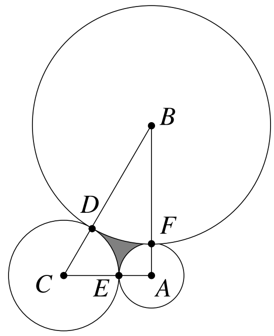
# Finale
# Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 17 september 2010, Technische Universiteit Eindhoven

## Uitwerkingen

**1.** In driehoek $ABC$ herkennen we direct een halve gelijkzijdig driehoek. Hieruit volgt dat $|BC| = 2|AC| = 12$. De stelling van Pythagoras geeft dan: $|AB| = \sqrt{|BC|^2 - |AC|^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Noem de onderlinge raakpunten van de cirkels $D$, $E$ en $F$ (zie plaatje) en de stralen van de drie cirkels $r_A$, $r_B$ en $r_C$. De strategie is om de oppervlakte van de drie cirkelsectoren te bepalen en die af te trekken van de oppervlakte van driehoek $ABC$.




We zien dat $2r_A = (r_A + r_C) + (r_A + r_B) - (r_B + r_C) = |AC| + |AB| - |BC| = 6\sqrt{3} - 6$, zodat $r_A = 3\sqrt{3} - 3$. Nu volgt dat $r_B = 6\sqrt{3} - r_A = 3\sqrt{3} + 3$ en $r_C = 6 - r_A = 9 - 3\sqrt{3}$.

De oppervlakte van een cirkel met straal $r$ is gelijk aan $\pi r^2$. De oppervlakte van cirkelsector $AFE$ is dus $\frac{90}{360} \cdot \pi r_A^2$, oftewel $\frac{1}{4}\pi(36 - 18\sqrt{3}) = 9\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\pi$. Voor de oppervlaktes van cirkelsectoren $BDF$ en $CED$ vinden we respectievelijk $\frac{30}{360}\pi r_B^2 = 3\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi$ en $\frac{60}{360}\pi r_C^2 = 18\pi - 9\sqrt{3}\pi$.

Aangezien de oppervlakte van driehoek $ABC$ gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| = 18\sqrt{3}$, vinden we voor het grijze gebied de oppervlakte $18\sqrt{3} - (9\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\pi) - (3\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi) - (18\pi - 9\sqrt{3}\pi) = 18\sqrt{3} - 30\pi + 12\sqrt{3}\pi$. $\square$

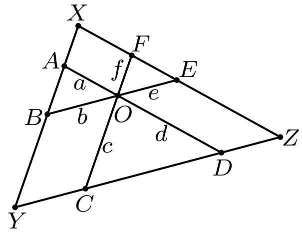
**2.** (a) Stel dat $k = m + (m+1) + \cdots + (n-1) + n$ een reekssom is. De somformule voor rekenkundige rijen vertelt ons dat $k = \frac{1}{2}(m+n)(n-m+1)$. Omdat $m$ en $n$ verschillend en positief moeten zijn, geldt $m + n \geqslant 3$ en $(n - m) + 1 \geqslant 2$.

Omdat $(m + n) + (n - m + 1) = 2n + 1$ oneven is, is een van de twee getallen $m + n$ en $n - m + 1$ oneven. Dus heeft $2k = (m + n)(n - m + 1)$ een oneven deler (groter dan 1) en kan daarmee geen tweemacht zijn. Ook $k$ is dus geen tweemacht.

We concluderen dat geen enkel getal zowel een reekssom als een tweemacht kan zijn.

(b) Stel dat $k$ een positief geheel getal is en geen tweemacht. We gaan bewijzen dat $k$ een reekssom is. Door alle factoren 2 apart te nemen, kunnen we $k$ schrijven als $c \cdot 2^d$ voor een oneven getal $c$ en een geheel getal $d \geqslant 0$. Dat $k$ geen tweemacht is, wil zeggen dat $c > 1$. We zoeken $n > m$ zodanig dat $m + \cdots + n = \frac{1}{2}(m+n)(n-m+1) = c \cdot 2^d$, oftewel $(m + n) \cdot (n - m + 1) = c \cdot 2^{d+1}$. Dit kan door $m$ en $n$ zó te kiezen dat $m + n = c$ en $n - m + 1 = 2^{d+1}$, of juist andersom: $m + n = 2^{d+1}$ en $n - m + 1 = c$. Om te zorgen dat $m$ positief wordt, onderscheiden we twee gevallen.
Als $c \geqslant 2^{d+1}$ lossen we op: $m + n = c$, $n - m + 1 = 2^{d+1}$. Dit geeft $m = (c - 2^{d+1} + 1)/2$ en $n = (c + 2^{d+1} - 1)/2$. Duidelijk is dat $n > m$ (want $2^{d+1} \geqslant 2$). Beide getallen $m$ en $n$ zijn geheel (de tellers zijn even omdat $c$ oneven is) en positief wegens de aanname $c \geqslant 2^{d+1}$.
Als $c < 2^{d+1}$ lossen we op: $m + n = 2^{d+1}$, $n - m + 1 = c$. Dit geeft $m = (2^{d+1} - c + 1)/2$ en $n = (2^{d+1} + c - 1)/2$. Duidelijk is dat $n > m$ (want $c > 1$) en dat beide getallen geheel en positief zijn. $\square$

**3.** Omdat $AO$ evenwijdig is aan $XZ$ geldt wegens F-hoeken $\angle OAB = \angle ZXY$. Dankzij evenwijdigheid van $BO$ en $YZ$ geldt wegens F-hoeken $\angle ABO = \angle XYZ$. Nu concluderen we dat $\triangle OAB \sim \triangle ZXY$ (hh). Dat betekent dat er een vergrotingsfactor $u$ is zodat $a = u|XZ|$ en $b = u|YZ|$. Op analoge wijze zie je dat $\triangle OCD \sim \triangle XYZ$ en $\triangle OEF \sim \triangle YZX$. Er zijn dus vergrotingsfactoren $v$ en $w$ zodat $c = v|XY|$, $d = v|XZ|$, $e = w|YZ|$ en $f = w|XY|$.




Nu zien we dat $a{\cdot}c{\cdot}e = uvw{\cdot}|XY|{\cdot}|YZ|{\cdot}|ZX| = b{\cdot}d{\cdot}f$. Er geldt dus dat $a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d{\cdot}e{\cdot}f = (a{\cdot}c{\cdot}e)^2$. Dit is een kwadraat van een geheel getal, aangezien $a$, $c$ en $e$ geheel zijn. □

**4.** (a) Stel dat $(x, y)$ zo'n paar is en bekijk de gehele getallen $a = x + 3y$ en $b = 3x + y$. Omdat $0 < x, y < 1$, geldt dat $0 < a, b < 4$, oftewel $1 \leqslant a, b \leqslant 3$.

Laat nu omgekeerd $a$ en $b$ twee gehele getallen zijn met $1 \leqslant a, b \leqslant 3$. Er is precies één paar getallen $(x, y)$ waarvoor geldt dat $a = x + 3y$ en $b = 3x + y$. Immers, combineren van de twee vergelijkingen geeft $3b - a = 3(3x + y) - (x + 3y) = 8x$ en $3a - b = 8y$, oftewel $x = (3b - a)/8$ en $y = (3a - b)/8$ (en deze $x$ en $y$ voldoen ook echt aan de twee vergelijkingen). Invullen van $1, 2, 3$ voor $a$ en $b$ geeft zo negen paren $(x, y)$:

$$(\tfrac{2}{8}, \tfrac{2}{8}), (\tfrac{5}{8}, \tfrac{1}{8}), (\tfrac{8}{8}, \tfrac{0}{8}), \quad (\tfrac{1}{8}, \tfrac{5}{8}), (\tfrac{4}{8}, \tfrac{4}{8}), (\tfrac{7}{8}, \tfrac{3}{8}), \quad (\tfrac{0}{8}, \tfrac{8}{8}), (\tfrac{3}{8}, \tfrac{7}{8}), (\tfrac{6}{8}, \tfrac{6}{8}).$$

Vanwege de eis dat $0 < x, y < 1$ moet gelden, vallen hiervan de twee mogelijkheden $(x, y) = (\tfrac{8}{8}, \tfrac{0}{8}), (\tfrac{0}{8}, \tfrac{8}{8})$ af. De overgebleven 7 paren zijn dus precies de in de opgave gevraagde paren.

(b) Stel dat $0 < x, y < 1$ en dat $a = x + my$ en $b = mx + y$ gehele getallen zijn. Dan geldt $1 \leqslant a, b \leqslant m$.

Gegeven gehele getallen $a$ en $b$ met $1 \leqslant a, b \leqslant m$ is er precies één paar $(x, y)$ waarvoor geldt $x + my = a$ en $mx + y = b$, want combineren van de twee vergelijkingen geeft: $mb - a = (m^2 - 1)x$ en $ma - b = (m^2 - 1)y$, oftewel $x = (mb - a)/(m^2 - 1)$ en $y = (ma - b)/(m^2 - 1)$. Deze $x$ en $y$ voldoen ook inderdaad aan de twee vergelijkingen.

We bekijken nu voor welke $a$ en $b$ de bijbehorende getallen $x$ en $y$ ook voldoen aan $0 < x, y < 1$. Uit $1 \leqslant a, b \leqslant m$ volgt dat $x \geqslant (m{\cdot}1 - m)/(m^2 - 1) = 0$ en dat $x \leqslant (m{\cdot}m - 1)/(m^2 - 1) = 1$. De gevallen $x = 0$ en $x = 1$ corresponderen precies met $(a, b) = (m, 1)$ respectievelijk $(a, b) = (1, m)$. Evenzo geldt dat $0 < y < 1$ tenzij $(a, b) = (1, m)$ of $(a, b) = (m, 1)$. Van de $m^2$ mogelijkheden voor $(a, b)$ zijn er dus twee zonder oplossing. In totaal geeft dit $m^2 - 2$ oplossingen $(x, y)$.

Uit $m^2 - 2 = 119$ volgt nu dat $m = 11$. □

**5.** Een strategie waarmee Amber gegarandeerd wint is de volgende. In haar beurt splitst Amber elke stapel met een even aantal munten (zeg $2k$) in twee stapels met elk een oneven aantal munten (zeg 1 munt en $2k - 1$ munten). De stapels met een oneven aantal munten splitst ze niet. In haar eerste zet maakt zij dus een stapel van 1 munt en een stapel van 2009 munten.

Wanneer Bram aan zet is, hebben alle stapels een oneven aantal munten. Hij is gedwongen om minstens één (oneven) stapel te splitsen, waarbij een stapel met een even aantal munten ontstaat. Dat betekent dat Amber in de volgende beurt weer haar strategie kan volgen.

Bij iedere zet neemt het aantal stapels toe, zodat het spel na hoogstens 2009 zetten is afgelopen. Omdat Bram altijd een stapel met een even aantal munten maakt, kan het spel niet in zijn beurt eindigen. Het zal dus Amber zijn die wint. □