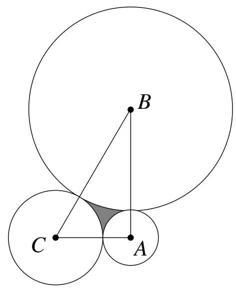
Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 17 september 2010
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Hierbij telt niet alleen het (eind)antwoord; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel. Veel succes!

1. Gegeven is een driehoek ABC met $\angle A = 90°$, $\angle C = 60°$ en $|AC| = 6$. Drie cirkels met middelpunten A, B en C raken elkaar (uitwendig) op de zijden van deze driehoek.
Bereken de oppervlakte van het vlakdeel dat deze drie cirkels insluiten (het grijze gebied).

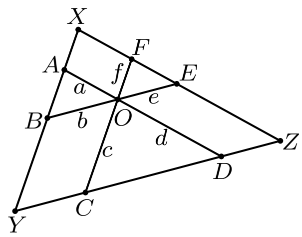


2. Een getal heet een *reekssom* als het geschreven kan worden als $m + (m+1) + \cdots + (n-1) + n$, voor positieve gehele getallen $m < n$. Zo is 18 een reekssom, want $18 = 5 + 6 + 7$. Een getal heet een *tweemacht* als het geschreven kan worden als 2^ℓ voor een geheel getal $\ell \geqslant 0$.

(a) Laat zien dat geen enkel getal zowel een reekssom als een tweemacht is.

(b) Laat zien dat elk positief geheel getal een reekssom of een tweemacht is.

3. Door een punt O in het inwendige van een driehoek XYZ gaan drie lijnen die evenwijdig zijn aan de zijden van de driehoek. Zo ontstaan op deze lijnen zes lijnstukken van O tot de zijden.
Gegeven is dat de lengten a, b, c, d, e en f van deze lijnstukken positieve gehele getallen zijn.
Bewijs dat het product $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$ het kwadraat van een geheel getal is.



4. (a) Bepaal alle paren (x, y) van (reële) getallen met $0 < x < 1$ en $0 < y < 1$ waarvoor $x + 3y$ en $3x + y$ beide geheel zijn. Een voorbeeld van zo'n paar is $(x, y) = \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$, want $x + 3y = \frac{3}{8} + \frac{21}{8} = \frac{24}{8} = 3$ en $3x + y = \frac{9}{8} + \frac{7}{8} = \frac{16}{8} = 2$.

(b) Vind het gehele getal $m \geqslant 2$ waarvoor geldt dat er precies 119 paren (x, y) zijn met $0 < x < 1$ en $0 < y < 1$ waarvoor $x + my$ en $mx + y$ beide geheel zijn.

Opmerking: als $u \neq v$, dan zijn (u, v) en (v, u) verschillende paren.

5. Amber en Bram spelen met 2010 munten het volgende spel. Gedurende het spel zijn de munten verdeeld over een aantal stapels met elk minstens 1 munt. Een zet bestaat eruit een of meer stapels te kiezen en elk van die stapels te splitsen in twee kleinere stapels. (Een stapel met maar 1 munt kan dus niet gekozen worden.) Het spel begint met één stapel van 2010 munten. Om beurten doen Amber en Bram een zet, waarbij Amber begint. Winnaar is degene die de eindsituatie van 2010 stapeltjes van 1 munt bereikt.
Bewijs dat Amber het spel altijd kan winnen, welke tegenzetten Bram ook doet.

© Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade