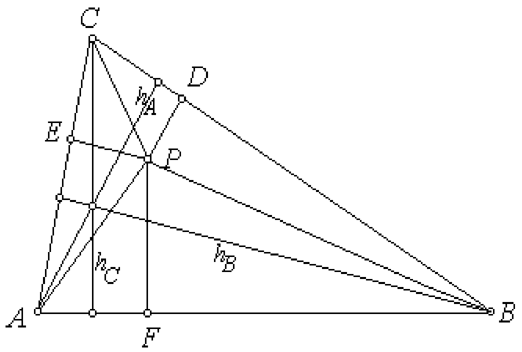
Uitwerkingen 2e ronde 2006

1. Een palindroom ligt vast als de eerste helft van het woord (inclusief de middelste letter bij een oneven lengte) gekozen is, en omdat elke letter ten hoogste twee keer gebruikt mag worden, kunnen we elke letter maar één keer kiezen voor de eerste helft. Het is duidelijk dat een palindroom een maximale lengte van 10 letters heeft onder de gestelde voorwaarden. Voor een palindroom met bijvoorbeeld lengte vijf hebben we voor de eerste letter de keuze uit 5 letters, voor de tweede letter de keuze uit 4 en voor de derde letter de keuze uit 3 letters; de vierde en vijfde letter liggen dan al vast. Dat zijn dus $5\times4\times3$ mogelijkheden. We maken een tabelletje:

lengte	aantal	lengte	aantal
3	5×4	4	5×4
5	$5\times4\times3$	6	$5\times4\times3$
7	$5\times4\times3\times2$	8	$5\times4\times3\times2$
9	$5\times4\times3\times2\times1$	10	$5\times4\times3\times2\times1$

Totaal dus 640 woorden.

2.



Noem *c* de lengte van *AB*,

noem *a* de lengte van *BC*,

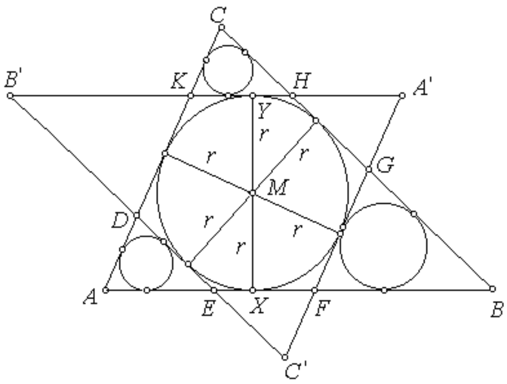
noem *b* de lengte van *CA*.

Noteer de oppervlakte van driehoek *ABC* met [*ABC*].

$[ABC]=\frac{1}{2}a\times h_A=\frac{1}{2}b\times h_B=\frac{1}{2}c\times h_C$.
$[ABC]=[BCP]+[CAP]+[ABP]=\frac{1}{2}a\times PD+\frac{1}{2}b\times PE+\frac{1}{2}c\times PF=$
$\frac{1}{2}a\times\frac{1}{3}h_A+\frac{1}{2}b\times\frac{1}{4}h_B+\frac{1}{2}c\times PF=\frac{7}{12}[ABC]+\frac{1}{2}c\times PF$. Dus $\frac{1}{2}c\times PF=\frac{5}{12}[ABC]$.
Dus $PF=\frac{5}{12}h_C$.

3. Het gaat om sommen van rekenkundige rijen: $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ en
$k+(k+1)+\cdots+n=(1+2+\cdots+n)-(1+2+\cdots+(k-1))=\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2}k(k-1)$.
Dus $k^2=\frac{1}{2}n(n+1)$ ofwel $2k^2=n(n+1)$. Omdat n en $n+1$ geen gemeenschappelijke deler groter dan 1 hebben moet gelden: óf n is een kwadraat en $(n+1)$ is $2\times$ een kwadraat, óf n is $2\times$ een kwadraat en $(n+1)$ is een kwadraat.
In het voorbeeld staan de eerste twee buurgetallen die hier aan voldoen: 8 en 9 met $n=8$ en $k=2\times3$. Het volgende paar is snel gevonden door de kwadraten af te lopen en te kijken of dat kwadraat -1 of dat kwadraat $+1$ misschien $2\times$ een ander kwadraat is. We vinden 49 en 50. Dus $n=49$ en $k=5\times7=35$.

4. Verleng de lijnstukken *DE*, *FG* en *HK* naar beide kanten totdat ze elkaar snijden.
Zet *A*' bij het snijpunt van *KH* en *FG*, *B*' bij het snijpunt van *HK* en *ED* en *C*' bij het snijpunt van *DE* en *GF*.



Noem het raakpunt van *AB* aan de cirkel *X* en het raakpunt van *HK* aan de cirkel *Y*.
$HK \,//\, AB$, $MX \perp AB$ en $MY \perp HK$, dus maken *MX* en *MY* een hoek van 180°.
Bij draaiing over 180° om *M* gaat de lijn door *A* en *B* over in de lijn door *H* en *K*. Evenzo gaat de lijn door *B* en *C* over in de lijn door *D* en *E* en de lijn door *A* en *C* over in de lijn door *F* en *G*.
ΔABC gaat dus over in de $\Delta A'B'C'$ bij draaiing om *M* over 180°.
Bij dezelfde draaiing gaat *HK* gaat over in EF, dus $HK = EF$.
$\Delta AED \sim \Delta ABC$, dus $r_A : r = AE : AB$.
$\Delta BFG \sim \Delta BAC$, dus $r_B : r = BF : BA$.
$\Delta CKH \sim \Delta CAB$, dus $r_C : r = KH : AB = EF : AB$.
$AB = AE + EF + FB$ dus $r = r_A + r_B + r_C$.

5. Leg in gedachten dominostenen (van twee vierkantjes) op het schaakbord zoals in de figuur aangegeven. Op elk van de mogelijke vierkanten van 2 bij 2 ligt dan één hele dominosteen. Telkens als speler A één van de twee vierkantjes van een dominosteen kleurt, kleurt speler B het tweede vierkantje van diezelfde dominosteen. Op die manier kan speler A nooit een 2 bij 2 vierkant met zijn kleur krijgen. Speler B kan zo voorkomen dat speler A wint. (Als speler A een van de velden kleurt waarop geen dominosteen ligt, dan doet speler B dat ook.)