Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 24 januari 2014

Uitwerking uitsmijter

Opgave.
Bepaal alle paren positieve gehele getallen (m, n) waarvoor geldt:

$$15 \cdot 2^n + 16 = m^2.$$

Antwoord.
De paren zijn $(16, 4)$, $(44, 7)$ en $(124, 10)$.

Uitwerking.
Eerst vullen we voor n de getallen 1 tot en met 4 in en controleren we of $15 \cdot 2^n + 16$ een kwadraat is. Dit blijkt alleen het geval voor $n = 4$ en daar vinden we de oplossing $(m, n) = (16, 4)$.

Vanaf nu nemen we aan dat $n \geqslant 5$. We herschrijven de gegeven vergelijking tot

$$15 \cdot 2^n = (m - 4)(m + 4).$$

In de uitdrukking links zitten minstens vijf factoren 2, dus rechts ook. In één van $m - 4$ en $m + 4$ zitten dus minstens drie factoren 2 en dat is dus een 8-voud. Omdat $m - 4$ en $m + 4$ verschil 8 hebben, zitten er dan in allebei minstens drie factoren 2, want een 8-voud plus of min 8 is weer een 8-voud. Verder bevat één van beide precies drie factoren 2 en niet meer: zouden ze namelijk allebei minstens vier factoren 2 hebben, dan zijn het twee 16-vouden met verschil 8 en dat kan niet. We kunnen dus $m - 4$ en $m + 4$ schrijven als (in een of andere volgorde) $8a$ en $2^{n-3}b$ met a en b oneven positieve gehele getallen. Er geldt dan

$$8a \pm 8 = 2^{n-3}b.$$

Bovendien moet het product van $m - 4$ en $m + 4$ gelijk zijn aan $15 \cdot 2^n$, dus $8a \cdot 2^{n-3}b = 15 \cdot 2^n$, dus $ab = 15$. Dat geeft voor het paar (a, b) vier mogelijkheden: $(1, 15)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$ en $(15, 1)$. We lopen ze allemaal langs:

- $(a, b) = (1, 15)$ geeft $8 \pm 8 = 2^{n-3} \cdot 15$. De rechterkant is ongelijk aan 0, dus de linkerkant mag ook geen 0 zijn. Dan moet het 16 zijn, maar dat is niet deelbaar door 15. Dus dit kan niet.
- $(a, b) = (3, 5)$ geeft $24 \pm 8 = 2^{n-3} \cdot 5$. De linkerkant is 16 of 32, maar beide zijn niet deelbaar door 5. Dus dit kan niet.
- $(a, b) = (5, 3)$ geeft $40 \pm 8 = 2^{n-3} \cdot 3$. De linkerkant is 32 of 48, waarvan alleen de laatste deelbaar is door 3. Dat geeft $16 = 2^{n-3}$, dus $n = 7$. Omdat $m - 4$ en $m + 4$ nu 40 en 48 zijn, is $m = 40 + 4 = 44$. We vinden de oplossing $(m, n) = (44, 7)$.
- $(a, b) = (15, 1)$ geeft $120 \pm 8 = 2^{n-3} \cdot 1$. De linkerkant is 112 of 128, waarvan alleen de laatste een tweemacht is. Dat geeft $n = 10$. Omdat $m - 4$ en $m + 4$ nu 120 en 128 zijn, is $m = 120 + 4 = 124$. We vinden de oplossing $(m, n) = (124, 10)$.

We concluderen dat er drie oplossingen (m, n) zijn: $(16, 4)$, $(44, 7)$ en $(124, 10)$.