Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 27 januari 2012

Uitwerkingen

A1. D) 12 Bekijk het linker plaatje. Op de plaats van het sterretje moet een getal staan waar 27 en 6 beide deelbaar door zijn. Dit geeft twee mogelijkheden: 1 of 3. De eerste mogelijkheid valt af, want dan zou op de plek van de dubbele ster het getal 27 staan, terwijl 36 hier niet door deelbaar is.

×		**		7
	24			56
		36	8	
*		27	6	
6	18			42

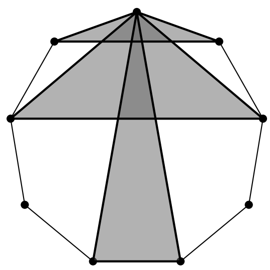
×	3	9	2	7
8	24	72	16	56
4	12	36	8	28
3	9	27	6	21
6	18	54	12	42

Met de tweede mogelijkheid kunnen we de hele tabel stap voor stap invullen (zie het rechter plaatje). We zien dat 12 het grootste getal is dat tweemaal voorkomt.

A2. A) 11111 Een palindroomgetal van vijf cijfers wordt precies bepaald door de eerste drie cijfers: het laatste cijfer is dan gelijk aan het eerste cijfer en het vierde cijfer is gelijk aan het tweede cijfer. De eerste twaalf 5-cijferige palindroomgetallen zijn dus:

$$\mathbf{100}01, \mathbf{101}01, \mathbf{102}01, \ldots, \mathbf{109}01, \mathbf{110}11, \mathbf{111}11.$$

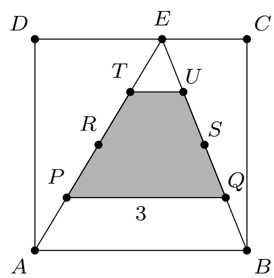
A3. B) 30 We tellen eerst het aantal gelijkzijdige driehoeken: daarvan zijn er 3. Vervolgens tellen we de gelijkbenige driehoeken die niet gelijkzijdig zijn. Voor zo'n driehoek zijn er 9 mogelijkheden voor de 'top'. Daarna zijn er 3 mogelijkheden voor de 'basis'. Dit geeft $9 \times 3 = 27$ mogelijkheden. In totaal zijn er dus $3 + 27 = 30$ gelijkbenige driehoeken.



A4. B) H, I en M Verschillende letters kunnen bij hetzelfde hoekpunt van de dipiramide horen. De vijf hoekpunten zijn: $G = F = J$, $K = M$, H, I en L. Punten H en I hebben vier buren, dus dat zijn hoekpunten van de grijze driehoek. Punt $K = M$ heeft ook vier buren: I, H, L en $G = F = J$, dat is dus het laatste hoekpunt van de grijze driehoek.

A5. D) 32 Het aantal blauwe sokken in de la noemen we b. Om zeker te weten dat hij twee *blauwe* sokken heeft, moet Frank 12 sokken pakken. In het slechtste geval pakt hij namelijk eerst de tien rode sokken. Om zeker te weten dat hij twee *rode* sokken heeft, moet hij $b + 2$ sokken pakken. In het slechtste geval pakt hij namelijk eerst de b blauwe sokken.
Gegeven is dat dit tweede aantal tweemaal zo groot is als het eerste, dus $b + 2 = 2 \times 12 = 24$. Hieruit volgt dat $b = 22$. Het totaal aantal sokken is dan $22 + 10 = 32$.

A6. B) 4 Driehoek EAB, driehoek EPQ en driehoek ETU zijn gelijkvormig, omdat $|AE| : |PE| : |TE| = 4 : 3 : 1 = |BE| : |QE| : |UE|$ en $\angle AEB = \angle PEQ = \angle TEU$ (zhz). Hieruit volgt dat $|AB| : |PQ| : |TU| = 4 : 3 : 1$. Hieruit volgt dat $|AB| = 4$, zodat de oppervlakte van driehoek ABE gelijk is aan $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.
Vanwege de gelijkvormigheid hebben driehoeken PQE en TUE daarom oppervlakte $(\frac{3}{4})^2 \times 8 = \frac{9}{2}$ respectievelijk $(\frac{1}{4})^2 \times 8 = \frac{1}{2}$. De oppervlakte van de vierhoek is dus $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$.

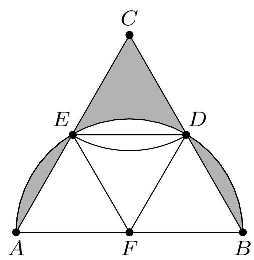


A7. D) 4 Omdat er maar twee verschillende uitkomsten zijn, kunnen er maar twee verschillende getallen op de kaarten voorkomen. Immers, als drie kaarten verschillende getallen dragen, dan geven ze in combinatie met een tweetal van de overige drie kaarten elk een andere uitkomst. Noem de twee getallen die voorkomen a en b. We mogen wel aannemen dat a op minstens drie kaartjes voorkomt. Omdat $a+a+a$, $a+a+b$ en $a+b+b$ verschillend zijn, mag b maar eenmaal voorkomen.
Er zijn nu twee gevallen: $a+a+a=16, a+a+b=18$ en $a+a+a=18, a+a+b=16$. De eerste mogelijkheid valt af omdat 16 geen drievoud is (a was een geheel getal). We zien dus dat $a=\frac{18}{3}=6$ en $b=16-12=4$. Het kleinste getal dat voorkomt is dus 4.

A8. E) 1342 Als a,b,c,d vier opeenvolgende getallen in de rij zijn, dan geldt $d=a-1$, want uit het gegeven volgt dat $b+c+d=(a+b+c)-1$. Met andere woorden: als je in de rij drie posities verder gaat, vind je een getal dat 1 kleiner is dan het getal waar je begon. De getallen op posities $3,6,9,\ldots,2013$ $(=3+3\times 670)$ zijn dus precies $2012, 2011, \ldots, (2012-670=)\ 1342$.

B1. $\frac{1}{2}$ De getallen waarvan het product van de cijfers 25 is bestaan uit twee vijven en drie enen. Het aantal hiervan, a, is gelijk aan het aantal manieren om de drie enen te plaatsen. Er is dan namelijk maar één manier om de twee vijven te plaatsen.
De getallen waarvan het product van de cijfers 15 is bestaan uit een drie, een vijf en drie enen. Het aantal hiervan, b, is gelijk aan het aantal manieren om eerst de drie enen te plaatsen en om vervolgens op twee manieren de drie en de vijf te plaatsen.
Er geldt dus dat $b=2a$, zodat $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$.

B2. 6π Punt F is het midden van AB (en het middelpunt van de halve cirkel). Punten D en E zijn de middens van BC en AC. Ze liggen op de halve cirkel omdat driehoeken BDF en AEF gelijkzijdig zijn. Teken de cirkelboog tussen D en E van de cirkel met middelpunt C en straal $|CE|=6$. Omdat $\angle AFE=\angle EFD=60^\circ$ geldt dat het cirkelsegment bij lijnstuk AE precies dezelfde afmetingen heeft als het cirkelsegment boven lijnstuk DE. Het cirkelsegment onder DE heeft ook die afmetingen omdat de twee cirkels rond C en F gelijke stralen hebben. Het cirkelsegment bij lijnstuk BD kan dus precies naar het cirkelsegment onder DE geschoven worden. De drie grijze gebiedjes hebben samen precies dezelfde oppervlakte als cirkelsector CED en die heeft oppervlakte $\frac{1}{6}(\pi\cdot 6^2)=6\pi$.



B3. 48 en 60 Het aantal hokjes in de lengte van de rechthoek noemen we a en het aantal in de breedte noemen we b. We mogen wel aannemen dat $a \geqslant b$. Het totaal aantal hokjes in de rechthoek is ab en het aantal hokjes aan de rand is gelijk aan $2a+2b-4$. Gegeven is dat de helft van de hokjes aan de rand ligt, dus $ab=2(2a+2b-4)$. Herschrijven geeft: $ab-4a-4b+16=8$. Het linkerlid kunnen we ontbinden, zodat we vinden dat $(a-4)(b-4)=8$.
Omdat a en b positieve gehele getallen zijn en $a \geqslant b$ geldt, zijn de enige mogelijkheden: $a-4=8, b-4=1$ en $a-4=4, b-4=2$. De mogelijkheden waarbij $a-4$ en $b-4$ negatief zijn vallen namelijk af, omdat $b-4$ dan hoogstens -4 is en b dan niet positief is. Oftewel: $a=12, b=5$ en $a=8, b=6$. Voor de rechthoek geeft dit $12\times 5=60$ of $8\times 6=48$ hokjes in totaal.

B4. $\frac{11}{2}$ Met **Regel 1** vinden we: $32 \IroningI 8=\frac{1}{2}+16 \IroningI 8=\frac{2}{2}+8 \IroningI 8=\frac{3}{2}+4 \IroningI 8$.
Uit **Regel 2** met $y=2$ en $x=8$ volgt: $4 \IroningI 8=64 \IroningI 2$.
Herhaald toepassen van **Regel 1** geeft: $64 \IroningI 2=\frac{1}{2}+32 \IroningI 2=\frac{2}{2}+16 \IroningI 2=\ldots=\frac{5}{2}+2 \IroningI 2$.
Samenvoegen en **Regel 3** invullen geeft nu:

$$32 \IroningI 8=\frac{3}{2}+4 \IroningI 8=\frac{3}{2}+64 \IroningI 2=\frac{8}{2}+2 \IroningI 2=\frac{11}{2}.$$