Eerste ronde 2003. Uitwerkingen.

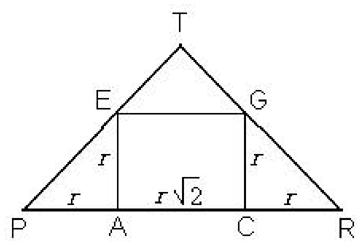
A1. $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Als S de som is van de drie getallen op elke zijde dan geldt $4S=36+$ de vier getallen op de hoekpunten. Om S zo klein mogelijk te maken moet de som van de getallen op de vier hoekpunten zo klein mogelijk zijn. Dat lukt niet met 1,2,3,4 omdat dan $4S=36+10=46$ en 46 is niet deelbaar door 4. De kleinste waarde die we kunnen proberen voor S is dus 12, want $48=4\times 12$.
Dat geeft de mogelijkheden: $48=36+1+2+3+6$ of $48=36+1+2+4+5$.
1 en 2 kunnen niet op één zijde liggen omdat je dan 9 nodig hebt om 12 te krijgen. Dus moeten 1 en 2 op een diagonaal liggen en dus ook 3 en 6 op een diagonaal. Dat geeft de oplossing

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 3 \\ 5 & & 7 \\ 6 & 4 & 2 \end{array}$$

, afgezien van draaiingen en spiegelingen.
De tweede mogelijkheid 1,2,4,5 geeft geen oplossing.

A2. Als je de kubus vier maal in dezelfde richting kantelt dan is de oriëntatie van de hoekpunten hetzelfde als tevoren. In plaats van vijf keer in één richting achter elkaar kun je volstaan met één keer in een richting. Het is duidelijk dat met één keer kantelen naar het oosten B en C op hun plaats blijven, daarna naar het noorden: C blijft weer opzijn plaats en dat blijft zo. Na vier keer ligt punt C weer op zijn plaats en dus ook punt E dat diagonaal tegenover C ligt. Dat zijn de enige hoekpunten, want een ander hoekpunt, bijv B komt op de plaats van D terecht en daarmee veranderen ook alle andere hoekpunten van plaats, met uitzondering natuurlijk van C en E.

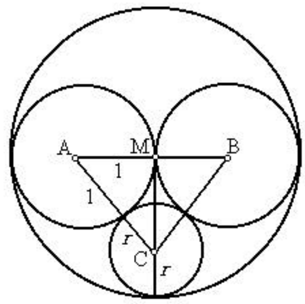
A3. Driehoek PRT is een geodriehoek omdat $PT=RT=1$ en $PR=PQ\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Noem de lengte van de ribbe van de kubus r, dan geldt:
$r+r\sqrt{2}+r=EA+AC+CG=PA+AC+CR=PR=\sqrt{2}$.
Dus $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.



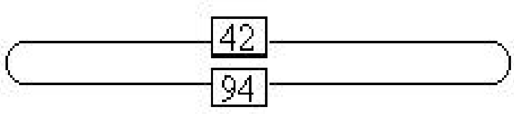
A4. Schrijf zo'n getal van twee cijfers als $\overline{ab}=10a+b$. Dan is $\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)$. Dus moet $11(a+b)$ een kwadraat zijn. Dat betekent dat $(a+b)$ gelijk is aan 11 of gelijk is aan een kwadraat maal 11. Dat laatste kan niet omdat $(a+b)$ niet zo groot kan zijn als 44. Blijft over $(a+b)=11$ met als oplossingen: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 en 92.

A5. Het raakpunt van de twee cirkels met straal 1 is het middelpunt van de cirkel met straal 2. Noem het middelpunt van de grote cirkel M, de middelpunten van de cirkels met straal 1 A en B en het middelpunt van de kleinste cirkel C. Noem de gevraagde straal r.
Dan geldt in driehoek AMC:
$AM=1,\ AC=1+r,\ MC=2-r$

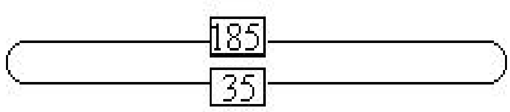
Met de stelling van Pythagoras vind je: $r=\dfrac{2}{3}$.



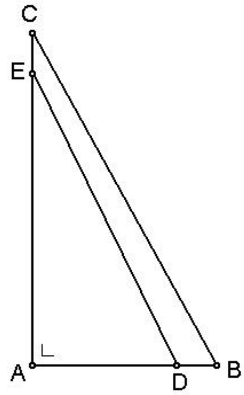
B1 Als Huub de eerste keer kijkt dan ziet hij de onderstaande situatie waarbij in het rechter deel van de lus de gondeltjes 43 t/m 93 zitten. Dat zijn in totaal 51 gondeltjes.



Als Huub de tweede keer kijkt dan ziet hij de onderstaande situatie waarbij nu in het linkerdeel van de lus de gondeltjes 36 t/m 184 zitten. Dat zijn in totaal 149 gondeltjes.



In totaal zijn er dus $51+149+2=202$ gondeltjes.



B2. Noem AD x en AE y dan geldt $xy=\frac{3}{4}\times 8\times 15=90$. Voor de omtrekken geldt: $x+y+DE=(8-x)+(15-y)+DE+17$ dus $x+y=20$. Dus $y=20-x$ en $x^2-20x+90=0$. Dat geeft $x=10-\sqrt{10}$ en $y=10+\sqrt{10}$. $(10+\sqrt{10})^2=110+20\sqrt{10}$ en $(10-\sqrt{10})^2=110-20\sqrt{10}$ en dus $DE=\sqrt{220}=2\sqrt{55}$.
(anders: $DE^2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=20^2-2\times 90=220$)

B3. $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ dus moet $\frac{1}{2}n(n+1)$ een 1000-voud zijn en $n(n+1)$ dus een 2000-voud. Omdat $2000=2^4\times 5^3$ moeten n en n+1 samen vier factoren 2 en drie factoren 5 bevatten. Omdat n en n+1 niet beide even kunnen zijn en ook niet beide een vijfvoud, moeten alle factoren 2 in een van de twee getallen zitten en de factoren vijf in het andere. De getallen die drie factoren 5 bevatten, zijn 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, etc. We zoeken dus een getal uit die rij waarbij een van de buurgetallen vier factoren 2 bevat en dus een 16-voud is. Het kleinste getal waarbij dat klopt is 625 omdat $624=16\times 39$. Dus is het antwoord: $n=624$.

B4. Probeer nog een aantal stappen om een patroon te vinden:

$$(8,-1)\xrightarrow[+(0,6)]{}(8,5)\xrightarrow[+(-6,6)]{}(2,11)\xrightarrow[+(-7,0)]{}(-5,11)\xrightarrow[+(-7,-7)]{}(-12,4)\ \cdots$$

en daarna $$(-12,4)\xrightarrow[+(0,-8)]{}(-12,-4)\xrightarrow[+(8,-8)]{}(-4,-12)$$

Na de eerste 8 stappen ben je in (-2,-6). Dan begint een nieuwe rondgang van acht stappen die eindigt in (-4,-12) . Algemeen : na 8*n* stappen kom je in (-2*n*,-6*n*). Dus na 2000 stappen ben je in (-500, -1500) .
De eerste rondgang begint met een stap 1 naar rechts met lengte 1, de tweede rondgang begint met stap 9 naar rechts met een lengte 5, stap 2001 gaat naar rechts over een lengte van 1001 (+(1001,0)), stap 1002 over 1001 diagonalen naar rechtsboven (+(1001,1001) en stap 2003 naar boven over 1002 (+(0,1002)) .
Uitgaande van (-500,-1500) kom je via (501,-1500) en (1502,-499) in (1502,503) .