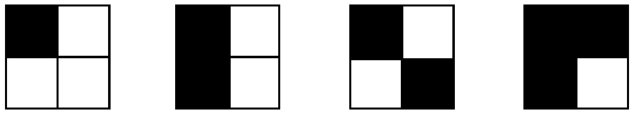
Uitwerkingen 1^e ronde 2001

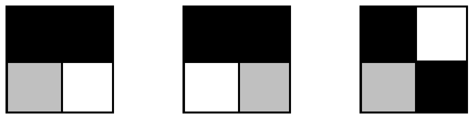
A1. In totaal zijn er 24 oplossingen. Als we maar één kleur gebruiken zijn er 3 oplossingen. Als we twee kleuren gebruiken dan kunnen we op drie manieren een combinatie van twee kleuren kiezen. Met twee kleuren kunnen we de volgende vier mogelijkheden realiseren:

In dit geval geeft dat dus 12 mogelijkheden.



Met alle drie de kleuren moeten er telkens twee vierkantjes zijn met dezelfde kleur. Dan zijn er bij elke kleurkeuze voor de twee vierkantjes drie mogelijkheden:

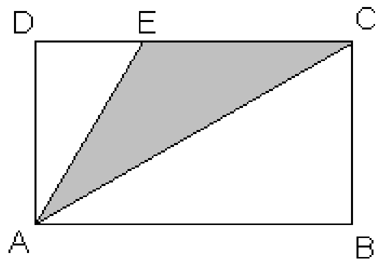
In dit geval dus 9 mogelijkheden.



Totaal dus 3+12+9=24

A2 Het is duidelijk dat de cijfers 1, 2 en 3 als eerste cijfer gebruikt moeten worden om de totale som zo klein mogelijk te houden. Verder moeten we zoveel mogelijk hoge cijfers achteraan zetten. Het cijfer 9 kan niet als laatste geplaatst worden, dus de 9 moet bij een van de getallen in het midden staan. Maar dan kunnen we de 8 daar direct achter zetten. Dan blijft als grootste cijfer 7 over. Dat moet weer in het midden staan en daar kan dan direct weer de 6 achter gezet worden. Dan blijft de 5 over als middelste cijfer van het laatste getal, met de 4 als laatste cijfer. Opgeteld levert dat 828.

A3 AC = 2. De driehoek die omgevouwen wordt, is de helft van een gelijkzijdige driehoek. $\angle CAB = 30°$. Vanwege het vouwen geldt ook $\angle CAE = 30°$. Dus ook $\angle EAD = 30°$. De driehoeken ABC en ADE zijn gelijkvormig, dus $DE : DA = BC : BA$. Daaruit volgt dat $DE = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Dus $EC = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ en de gevraagde oppervlakte is dus gelijk aan $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.



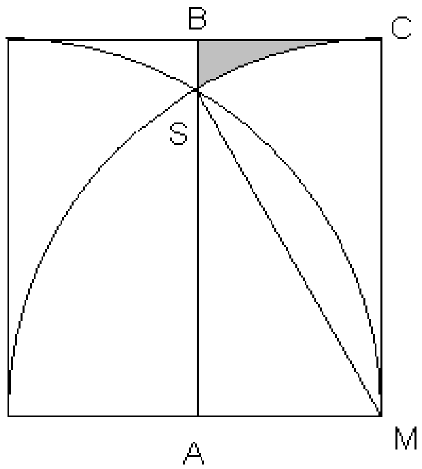
A4 Als je het getal N schrijft als ab dan is $N = 10a+b$. Het omgekeerde van N is dan gelijk aan $10b+a$. Samen geeft dat $11a+11b=11(a+b)$. Omdat dit laatste een kwadraat moet zijn moet dus gelden dat $(a+b)$ gelijk moet zijn aan 11 of een kwadraat maal 11. $(a+b)=11$ geeft de oplossingen 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 en 92. Als $(a+b)$ een kwadraat maal 11 moet zijn dan is het minimaal 44 en dat kan niet omdat a en b kleiner dan 10 moeten zijn. Dus 8 oplossingen.

A5. Noem de ribbe van de kubus voor de operatie x , dan is de inhoud dus x^3. Na de operatie is de inhoud $(x-2)^3$. Afgezaagd is dan $x^3 - (x-2)^3 = 6x^2 - 12x + 8 = 1538$ ofwel $x^2 - 2x - 255 = 0$, en dus $(x-17)(x+15) = 0$. Alleen de positieve oplossing 17 voldoet. De inhoud voor de operatie was dus $17^3 = 4913$.

B1. Als we de middelste rechthoek niet meerekenen dan hebben we vier rechthoeken met een totale omtrek van 16+18+18+20 = 72. Die totale omtrek is ook de omtrek van de grote rechthoek plus de omtrek van de binnenste rechthoek in de figuur rechtsonder. Door de omtrek van de binnenste rechthoek 22 van 72 af te trekken vinden we gevraagde omtrek van de grote rechthoek: 50 .

B2. Elk even getal geeft minstens één factor 2. Er zijn in het product 1000 even getallen. Dat geeft in elk geval al 1000 factoren 2. Maar alle viervouden geven elk nog minstens een extra factor 2, en er zijn 500 viervouden (2001/4=500,25 en dat geeft afgerond naar beneden 500). Elk achtvoud geeft weer minstens een extra factor 2 en er zijn 250 achtvouden (2001/8 = 125,… weer afronden naar beneden) Vervolgens geven de 16-vouden weer minstens een extra factor 2 en er zijn 125 16-vouden. Analoog voor 32-vouden, 64-vouden, …. en 1024-vouden. In totaal vinden we:
1000 + 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 +1 = 1994 factoren 2.

B3. De oppervlakte van het gearceerde gebied BCS vinden we door van de rechthoek $AMCB$ met oppervlakte 3×6 de oppervlakte van driehoek AMS en de oppervlakte van de cirkelsector MCS af te trekken. $SA=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$. Verder geldt $\angle CMS=30°$ omdat $\angle SMA=60°$. Voor de gearceerde oppervlakte vinden we: $18-4\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{12}\pi 6^2$. De gevraagde oppervlakte is twee maal zo groot , dus $36-9\sqrt{3}-6\pi$.



B4. Oplossingen van $3xy-2x-y=8$ zijn ook oplossingen van $9xy-6x-3y=24$ en dat kunnen we schrijven als $9xy-6x-3y+2=26$ ofwel $(3x-1)(3y-2)=26$. Nu kan 26 geschreven worden als 1×26 of 2×13. Nu is $1\times 26=(3-2)(27-1)$ en dat geeft als oplossing $(x,y)=(9,1)$. Verder is $2\times 13=(3-1)(15-2)$ en dat geeft $(x,y)=(1,5)$.