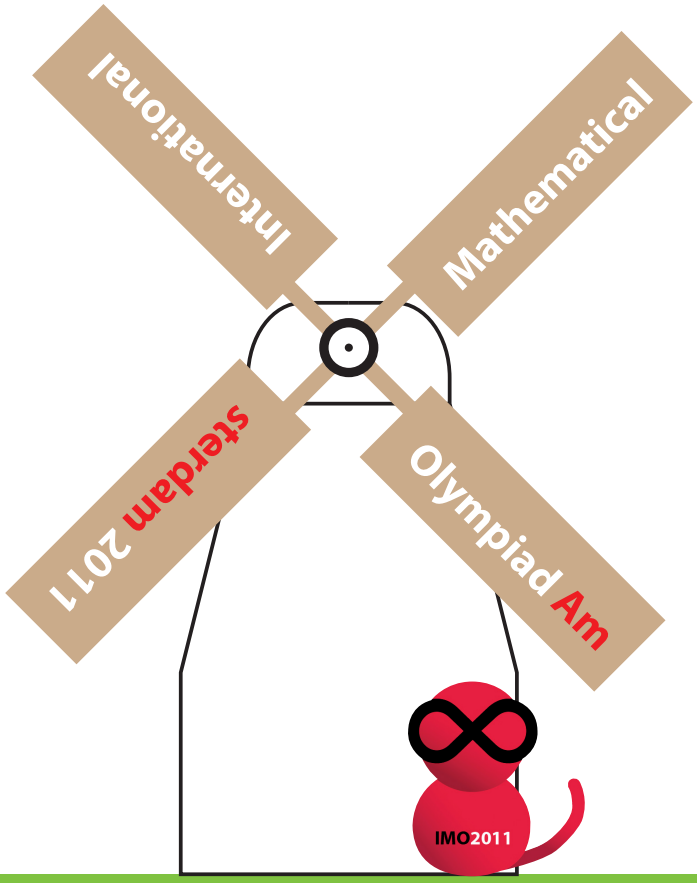
Deze zomer vond de 52ste Internationale Wiskunde Olympiade (*International Mathematical Olympiad* ofwel IMO) plaats; dit jaar voor de eerste keer in Nederland. Tussen 16 en 24 juli gingen 564 leerlingen uit 101 landen de strijd aan, met elkaar én met zes moeilijke wiskundeopgaven. Sietske Tacoma, die zelf in 2004 en 2005 meedeed met de IMO en dit jaar het team begeleidde als *deputy leader*, bespreekt in dit artikel een van die opgaven.

■ door Sietske Tacoma

KLAPPEN VAN



OPGAVE 2 (IMO 2011)

Zij S een eindige verzameling van ten minste twee punten in het vlak, waarvan er geen drie op één lijn liggen. Een *windmolen* is een proces dat begint met een lijn l die door één punt P van S gaat. De lijn draait met de klok mee om het *draaipunt* P tot er voor het eerst een ander punt van S op deze lijn komt te liggen; we noemen dit punt Q en dit wordt het nieuwe draaipunt. We zeggen dan dat Q *een klap van de molen krijgt*. De lijn draait nu met de klok mee om Q, totdat opnieuw een punt van S een klap van de molen krijgt. De windmolen deelt zo oneindig veel klappen uit.

Laat zien dat we een punt P van S en een lijn l door P kunnen kiezen zodat er een windmolen ontstaat waarbij elk punt van S oneindig veel klappen van de molen krijgt.

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 50 JAAR

DE MOLEN

Na maanden intensief trainen en oefenen met oude vraagstukken, was het voor de deelnemers van de Internationale Wiskunde Olympiade erg spannend hoe de opgaven er dit jaar uit zouden zien. 'Anders dan anders', luidde het oordeel van veel (soms teleurgestelde) deelnemers over de opgaven van de eerste wedstrijddag.

Opgave 2 ging weliswaar over punten en lijnen, maar was geen echte meetkundeopgave. De context hadden de deelnemers echter kunnen raden: het IJslandse team gaf bij aankomst op Schiphol op de vraag 'wat is het eerste wat in je opkomt als je denkt aan Amsterdam?' als antwoord: '*history and culture, oh! and windmills*', en wat kregen de deelnemers op de eerste wedstrijddag voor hun kiezen? Juist, een vraagstuk over windmolens, zie het kader op de linkerpagina.

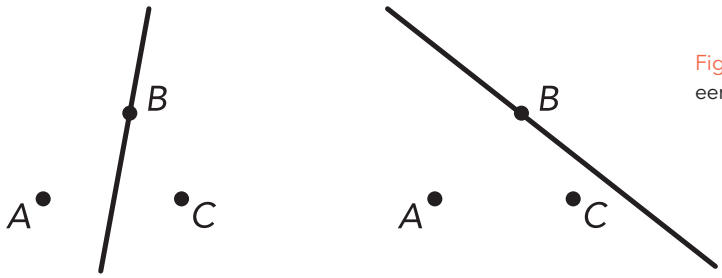
Het windmolenprobleem viel op omdat maar 29 van de 564 deelnemers een (bijna) complete oplossing vonden, waaronder de Nederlandse Madelon de Kemp. Op de andere opgaven heeft ook de rest van het Nederlandse team goed gescoord, dus gingen ze met twee zilveren medailles, drie bronzen medailles en een eervolle vermelding naar huis.

In het landenklassement werd Nederland 28ste. Winnaar was China, gevolgd door de Verenigde Staten en, verrassend, Singapore. De beste individuele deelnemer, de Duitse Lisa Sauermann, behaalde als enige alle 42 punten. Ze behaalde deze olympiade haar vierde gouden medaille en daarmee is ze de beste deelnemer aller tijden.

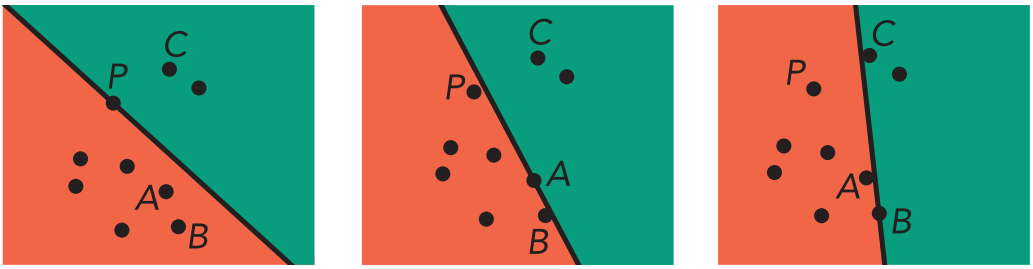
GOEDE WINDMOLENS Ondanks het feit dat de oplossing voor het windmolenprobleem moeilijk te vinden is, is er nauwelijks ingewikkelde wiskunde nodig om het probleem te begrijpen. Volgens de opgave bevat S minstens twee punten. Bekijk eerst het simpelste geval: precies twee punten en een lijn door één van deze twee. Dit levert natuurlijk altijd een windmolen op waarbij alle punten oneindig vaak een klap van de molen krijgen. Noem een windmolen, die elk punt in S oneindig vaak een klap geeft, een *goede windmolen*.

Ook voor drie punten krijgen we altijd een goede windmolen, al zijn er nu twee mogelijkheden, zie figuur 1. Links krijgt eerst A een klap van de molen, vervolgens draait de molen door om A en krijgt C een klap. Daarna draait de molen door om C, krijgt B weer een klap en zijn we terug in de beginsituatie. We zien dat de molen altijd voor een deel binnen driehoek ABC ligt.

Rechts krijgt eerst C een klap van de molen, vervolgens A, dan B en zijn we terug in de beginsituatie. Hier draait de molen altijd om de driehoek heen. Als er een punt D binnen driehoek ABC zou liggen, zou D nooit een klap van de molen krijgen.



Figuur 1 Twee mogelijkheden voor een molen met drie punten.



Figuur 2 Drie verschillende standen van de molen.

TWEE DRAAIENDE HALFVLAKKEN Nu we dit weten, is het tijd om naar een algemener plaatje te kijken, zie figuur 2 links. De molen verdeelt het vlak in twee gekleurde stukken, die we laten meedraaien met de molen. Eerst krijgt A, in het rode deel, een klap. Daarna draait de molen door om A en komt P, het vorige draaipunt, ook in het rode deel terecht. Na deze klap van de molen liggen er dus evenveel punten in het rode deel als ervoor. We zijn nu in het middelste plaatje van figuur 2.

Hier is B het volgende punt dat een klap krijgt, zie het rechter plaatje van figuur 2, waar C de volgende klap zal krijgen. Kijk nu goed naar het aantal punten dat in het rode en groene deel van het vlak ligt: dit verandert niet door het draaien van de molen (behalve op het moment van de klap zelf, als er heel even twee punten op de molen liggen).

Het is niet moeilijk om in te zien dat dit in het algemeen geldt: als een punt in het rode (groene) deel een klap krijgt en van kleur wisselt, komt het vorige draaipunt in het rode (groene) deel te liggen, zodat het totaal hetzelfde blijft.

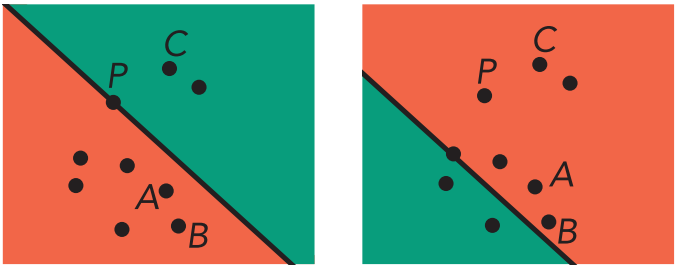
In figuur 2 draait de lijn van ongeveer ‘4 uur’ via ‘5 uur’ richting ‘6 uur’. Op ‘10 uur’ is hij 180° gedraaid ten opzichte van de beginsituatie, zie figuur 3, rechts.

MOLENEIGENSCHAP Ook zonder de molen van punt tot punt te volgen, weten we zeker dat dit de situatie is nadat de molen 180° is gedraaid. Er moeten namelijk nog steeds twee punten in het groene deel liggen. Als we alle lijnen trekken die evenwijdig zijn aan de beginstand van de molen, dan is er maar één die door een punt van S gaat, zodanig dat er precies twee punten linksonder die lijn liggen.

Deze observatie is heel belangrijk, en we kunnen hem algemener formuleren als de *moleneigenschap*: in vrijwel iedere richting is er precies één lijn door een punt van S die het vlak verdeelt in een rood en een groen deel, met k punten aan de rode kant en $n - k - 1$ punten aan de groene kant, waarbij n het aantal punten van S is en $0 \leq k \leq n - 1$.

Je kunt dit als volgt inzien. Kies een lijn (die niet evenwijdig is aan een lijn door enig paar punten in S), die helemaal naast S ligt, zodat alle punten aan de groene kant liggen. Verschuif deze lijn in de richting loodrecht op de lijn naar de groene kant toe. We stoppen met schuiven bij het $k + 1$-ste punt dat we tegenkomen. Daarvoor zijn we al k punten tegengekomen, dus die liggen nu allemaal in het rode gebied. Verder ligt er één punt op de molen en de andere $n - k - 1$ punten liggen in het groene gebied.

Het is hierbij dus wel van belang dat er op deze verschoven lijn niet net toevallig twee punten tegelijk komen te liggen. Vandaar de voorwaarde dat de lijn niet evenwijdig is aan een lijn door enig paar punten in S. Op deze manier sluiten we weliswaar een heleboel richtingen uit, maar het gaat nog



Figuur 3 De molen in de beginsituatie en na 180° draaien.

Foto: Marijn van Rij

Het Nederlandse team. De eerste vier zijn van links naar rechts: Merlijn Staps (16 jaar, Leusden), Daniël Kroes (17 jaar, Woerden), Ragnar Groot Koerkamp (16 jaar, Opijnen) en Jeroen Huijben (15 jaar, Goirle). Rechts staan Madelon de Kemp (18 jaar, Nijmegen) en Jetze Zoethout (16 jaar, Goutum). De derde van rechts is Jeroen Winkel (14 jaar, Nijmegen). Hij behoorde niet tot het team, maar kreeg na de selectieronde de aanmoedigingsprijs.

steeds maar om eindig veel richtingen. We kunnen gewoon als beginstand een richting kiezen die ongelijk is aan al die richtingen; dan komen we geen problemen tegen en is het – met de moleneigenschap – helemaal duidelijk wat de situatie na 180° draaien is.

Nu terug naar ons voorbeeld. De twee punten in figuur 3 (rechts) in het groene deel, lagen eerst in het rode deel. Een punt kan alleen van kleur wisselen, als de molen door dat punt heen gaat. Deze twee punten moeten dus wel een klap van de molen hebben gehad. Ook de twee punten die in het begin in het groene deel lagen, zijn van kleur veranderd en hebben dus een klap gehad. Het zou nou handig zijn, als we op deze manier konden garanderen dat álle punten een klap van de molen hebben gehad. En hiervoor komt de moleneigenschap weer goed van pas.

Veronderstel eerst dat S bestaat uit een oneven aantal punten, zeg $n = 2m + 1$. We kiezen een beginstand die niet evenwijdig is aan een lijn door enig paar punten in S. Vanwege de moleneigenschap is er een lijn met m punten aan de rode kant en $n - m - 1 = m$ punten aan de groene kant van de lijn. Nadat deze molen 180° gedraaid is, liggen er nog steeds m punten in het groene en m punten in het rode deel. Het punt waar de molen na de draai doorheen gaat, moet hetzelfde punt zijn als waar de molen in het begin doorheen ging, vanwege de moleneigenschap. De rode en de groene kant zijn dus precies verwisseld. Dus alle punten in het groene deel liggen nu in het rode deel en omgekeerd, dus ze hebben allemaal een klap van de molen gehad. Het laatste punt heeft duidelijk ook klappen gehad, want daar gaat de molen in de begin- en eindsituatie doorheen.

Volgens dezelfde redenering is de molen na nog eens 180° draaien terug in de beginsituatie en begint alles weer opnieuw, dus alle punten krijgen oneindig veel klappen van deze windmolen. Voor een oneven aantal punten hebben we het probleem nu opgelost.

Nu rest nog het geval $n = 2m$, een even aantal punten. We kunnen nu niet dezelfde beginsituatie kiezen, want als de molen door een punt van S gaat, blijft een oneven aantal punten over. Die kunnen we niet eerlijk over de rode en groene kant verdelen, maar wel zo eerlijk mogelijk. Dus kies een molen met m punten in het rode deel en $m - 1$ punten in het groene deel. Na een draaiing van 180° loopt de molen weer evenwijdig aan zijn beginsituatie, maar zijn de groene en de rode kant omgedraaid.

Dankzij de moleneigenschap weten we nu dat alle punten uit het oorspronkelijke groene deel, én het oorspronkelijke draaipunt, in het rode deel moeten liggen. Alle punten in het oorspronkelijke groene deel zijn dus van kleur veranderd. Alle andere punten liggen na de halve draai óf op de molen, óf in het groene deel. Deze punten lagen oorspronkelijk allemaal in het rode deel, dus ook zij moeten een klap van de molen hebben gehad. Dus alle punten hebben na een draaiing van 180° een klap van de molen gehad. Na nog eens 180° draaien is de molen terug in de beginsituatie, dus krijgen we opnieuw een goede windmolen. En daarmee is de windmolenopgave opgelost. ■