Op 16 september vond de finale van de 50ste Wiskunde Olympiade plaats op de Technische Universiteit Eindhoven. Aan de eerste ronde, in februari, deden dit jaar maar liefst 5257 leerlingen mee. De beste 799 kregen een uitnodiging voor de tweede ronde op 10 universiteiten in Nederland. De 142 winnaars hiervan gingen in Eindhoven de strijd met elkaar aan. Een van de vragen ging over een toernooi met een opmerkelijke uitslag.

■ door Quintijn Puite

EEN BIJZONDERE UITSLAG

OPGAVE 3 (NWO FINALE 2011)
Bij een toernooi met zes teams speelt ieder team eenmaal tegen elk ander team. Als een team een wedstrijd wint, krijgt het daarvoor 3 punten en krijgt de verliezer 0 punten. Als er gelijk wordt gespeeld, krijgen beide teams 1 punt.

Kunnen de eindscores van de teams precies zes opeenvolgende getallen a, $a + 1$, ..., $a + 5$ zijn? Zo ja, bepaal alle waarden van a waarvoor dat kan.

Vaak gaat het bij wiskundige problemen om het bewijzen van bepaalde beweringen. Zo ook bij opgave 3 van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, zie het kader hierboven. Maar deze opgave vraagt nog méér van ons: we moeten eerst nog zelf bedenken wat het antwoord op de vraag eigenlijk is. En pas als we ervan overtuigd zijn dat het antwoord 'ja' of juist 'nee' is, kunnen we gaan proberen om dat waterdicht te bewijzen.

De vraag is dus in eerste instantie: zijn er nou wel of niet zulke opeenvolgende eindscores mogelijk bij een halve competitie tussen zes teams?

UITSLAGENTABELLEN Laten we ons eerst eens verdiepen in zo'n toernooi. Ieder team speelt tegen elk ander team, dus elk team speelt 5 wedstrijden. Dat zijn er dus $6 \times 5 = 30$ in totaal, maar daarbij tellen we elke wedstrijd dubbel. In totaal worden er dus 15 wedstrijden gespeeld.

We kunnen de uitslagen van de 15 wedstrijden in een uitslagentabel zetten. In tabel 1 (op de volgende pagina) zie je daar een voorbeeld van. Team A heeft in totaal 4 punten gehaald: 0 tegen B, 0 tegen C, 1 tegen D, 0 tegen E en 3 tegen F. En omdat team A 0 punten tegen team B heeft gehaald, heeft omgekeerd team B juist 3 punten tegen team A gehaald. Elke uitslagentabel moet aan deze regel voldoen: bij lijnspiegelen in de diagonaal gaan 0'en in 3'en over en vice versa, terwijl 1'en in 1'en overgaan.

We zien dat de behaalde scores in dit voorbeeld 4, 4, 6, 8, 8, 9 zijn: nog geen zes opeenvolgende getallen. Maar als we er in zouden slagen zo'n uitslagentabel op correcte wijze te vullen en wel zodanig dat er zes opeenvolgende getallen uitkomen, dan hebben we in ieder geval een a gevonden die voldoet.

Wat voor scores kunnen er überhaupt uit zo'n uitslagentabel komen? Elk team behaalt een score tussen de 0 en 15 punten, dus wat dat betreft ligt de som van alle scores tussen de 0 en de 90. Maar als er een team echt de volle 15 punten haalt, kan geen ander team meer 15 punten halen, want de andere teams hebben dan in ieder geval allemaal één wedstrijd verloren. We bekijken het daarom niet per team maar *per wedstrijd*.

Voor elk van de 15 wedstrijden worden er 2 punten uitgedeeld in geval van gelijkspel, of 3 punten als er een van de teams wint. De som van alle uitslagen ligt dus ergens tussen de 30 en de 45. In het voorbeeld hierboven was dat 4 + 4 + 6 + 8 + 8 + 9 = 39. Omdat dit op 6 punten na de maximale somscore van 45 is, kunnen we hier meteen iets uit afleiden: er zijn blijkbaar zes wedstrijden geweest waar 2 punten (1 + 1) in plaats van 3 punten (0 + 3) zijn uitgedeeld. Inderdaad zien we in onze uitslagentabel zes wedstrijden die in gelijkspel zijn geëindigd.

Nu is de vraag of hier zes opeenvolgende scores mogelijk zijn. Bijvoorbeeld 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dat is samen 21, dus dat is nooit mogelijk; de somscore ligt immers tussen de 30 en de 45. Ook 2, 3, 4, 5, 6, 7 werkt nog niet (dat is in totaal 27), maar 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 (= 33), 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 (= 39) en 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 (= 45) lijken wel degelijk mogelijk. Kortom, de gevallen a = 3, a = 4 en a = 5 zijn de enige waarden voor a die eventueel mogelijk zijn; andere waarden van a zijn onmogelijk, want voor lagere a is de somscore te laag, terwijl voor hogere a de somscore juist te hoog is. Nu nog kijken of we een daadwerkelijk toernooi kunnen vinden, met deze punten als teamuitkomsten!

ANALYSE PER GEVAL Eerst kijken we naar het geval a = 5 met uitslagen 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45. We hebben hierboven al gezien dat de somscore dan maximaal is. Dus elke wedstrijd zijn er 3 punten uitgedeeld en elk team krijgt steeds 0 of 3 punten. Dan heeft dus elk team ook een uitslag die deelbaar is door 3. Maar dan komen nooit de uitslagen 5, 7, 8 en 10 voor. Dit geval is dus niet mogelijk.

In het geval a = 3 met uitslagen 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33 zijn er maar 3 punten meer gehaald dan het absolute minimum van 30 waarbij alle wedstrijden in gelijkspel eindigen. Er is dus drie keer een winnaar uit de strijd gekomen, tegenover twaalf wedstrijden die in gelijkspel eindigden. Elk team speelt vijf wedstrijden. Dus het team met 5 punten zou die score nog behaald kunnen hebben met vijf maal 1 punt. Maar het team met 6 punten moet minstens één keer 3 punten hebben behaald. En net zo voor het team met 7 punten. Met één keer 3 punten en vier keer 1 punt haal je maar 7 punten, dus het team met 8 punten moet wel minstens twee keer 3 punten hebben behaald. In totaal zou er dus minstens vier keer 3 punten moeten zijn behaald. Maar dat is in regelrechte tegenspraak met het feit dat er maar drie keer een wedstrijd met een winnaar is geëindigd. Dit geval kan dus ook niet voorkomen.

We hebben nu nog één geval over: a = 4. De uitslagen zijn dan 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39. Net als in het voorbeeld hierboven weten we dat er zes wedstrijden zijn die in gelijkspel zijn geëindigd. Dan zijn er dus negen wedstrijden met een winnaar geëindigd. De vraag is nu eigenlijk heel simpel: kunnen we zesmaal de scores 1–1 en negenmaal de scores 3–0 in de uitslagentabel kwijt op zo'n manier dat de eindscores 4, 5, 6, 7, 8, 9 zijn?

Het team met 4 punten heeft ofwel 3, 1, 0, 0, 0 gehaald, danwel 1, 1, 1, 1, 0; iets anders is niet mogelijk. Voor de andere vijf teams kunnen we ook op deze manier kijken welke punten ze hebben ge-

	A	B	C	D	E	F	score
A	–	0	0	1	0	3	4
B	3	–	1	1	0	3	8
C	3	1	–	3	1	0	8
D	1	1	0	–	1	3	6
E	3	3	1	1	–	1	9
F	0	0	3	0	1	–	4

Tabel 1

score		
4	**3, 1, 0, 0, 0**	1, 1, 1, 1, 0
5	**3, 1, 1, 0, 0**	1, 1, 1, 1, 1
6	3, 3, 0, 0, 0	**3, 1, 1, 1, 0**
7	**3, 3, 1, 0, 0**	3, 1, 1, 1, 1
8	**3, 3, 1, 1, 0**	
9	3, 3, 3, 0, 0	**3, 3, 1, 1, 1**

Tabel 2

haald. Dat leidt tot tabel 2.

Omdat we eerder al zagen dat er maar negen maal de score 3 is gevallen, terwijl er elf maal de score 3 voorkomt in de linkerkolom van deze tabel, moeten we twee teams uitkiezen die uitslagen gehaald hebben volgens de rechterkolom. Dat kan op zich op $\binom{5}{2} = 10$ manieren. We kiezen nu eerst maar eens één van die 10 manieren en gaan proberen de uitslagentabel op die manier te vullen. Als dat niet direct lukt, kunnen we natuurlijk ook nog de andere manieren proberen. Pas als dat ons allemaal niet zou lukken, zouden we voor het antwoord 'nee' gaan als antwoord op de oorspronkelijke vraag. Maar dan zouden we natuurlijk nog wel echt moeten bewijzen dat het vullen van de tabel daadwerkelijk onmogelijk is (wat nog niet bewezen is als het ons alleen maar een paar keer niet is gelukt).

Hoe dan ook, het blijkt op de manier die in tabel 2 vet is aangegeven mogelijk te zijn een daadwerkelijk spelverloop te vinden dat de eindscores 4, 5, 6, 7, 8, 9 oplevert. Met een beetje proberen vind je al gauw een oplossing, zie tabel 3.

OP TWEE SPOREN We hebben al met al gezien dat $a = 4$ de enige waarde van a is die voldoet. Maar het bleek helemaal nog niet zo simpel om dat direct in te zien. Zo leek het eerst dat $a = 3$ en $a = 5$ ook wel zouden kunnen voldoen. We hadden daar wat extra argumenten voor nodig om die gevallen uit te sluiten.

Het mooie van deze opgave is dat je net als bij echt onderzoek constant op twee sporen zit. Er is steeds de wisselwerking tussen proberen een toernooi te vinden (voor $a = 3$ bijvoorbeeld) en als dat je niet lukt, heel goed proberen te analyseren waarom het niet lukt en daarmee proberen te bewijzen dat het inderdaad onmogelijk is. Het eindantwoord bestaat uit precies die waarden van a waarvoor er een toernooi met opeenvolgende eindscores is. En bij zo'n eindantwoord hoort een overtuigende onderbouwing: we moeten voor alle genoemde waarden van a een voorbeeld van een scoreverloop laten zien, terwijl we voor de overige waarden van a juist moeten bewijzen waarom er niet een scoreverloop met die einduitslag kan zijn.

Lijkt het jou ook leuk om je tanden in zulke uitdagende opgaven te zetten? Geef je dan bij je wiskundedocent op voor de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2012, die op vrijdagmiddag 27 januari weer plaatsvindt op alle deelnemende scholen. ■

	A	B	C	D	E	F	score
A	–	0	0	0	3	1	4
B	3	–	1	0	0	1	5
C	3	1	–	1	1	0	6
D	3	3	1	–	0	0	7
E	0	3	1	3	–	1	8
F	1	1	3	3	1	–	9

Tabel 3